Zadania domowe z Analizy II

Seria 2

1. Wyrazić równanie $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ we współrzędnych $u = x+y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$ na obszarze $\mathcal{D} = \{(x,y,z) : x > 0\}$, traktując w jako zmienną zależną, tzn. $w = w(u,v)$. Znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania w klasie funkcji $\mathcal{C}^2$.

2. Wyrazić równanie $(x^2 - y^2)z'_x + 2xyz'_y = xz$ na obszarze $\mathcal{D} = \{(x,y,z) : [x > 0 \text{ lub } y \neq 0]\,, z > 0\}$ we współrzędnych (u,v,w) traktując $w = w(u,v)$ jako zmienną zależną,
$$x = uw\cos v,\ \ y = uw\sin v,\ \ z = w;\ \ u > 0,\ \ w > 0,\ \ -\pi < v < \pi.$$
Podać rozwiązanie ogólne w postaci niejawnej $F(x,y,z) = 0$.

3. Rozwiązać równanie $(cy - bz)z'_x + (az - cx)z'_y = bx - ay$ przy ustalonych $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wyrażając je w nowych współrzędnych $u = ax+by+cz$, $v = xy$, $w = x^2 + y^2 + z^2$ oraz traktując $w = w(u,v)$ jako nową zmienną zależną.

4. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ na obszarze X:

   (a) $X = \mathbb{R}^3_+,\ f(x,y,z) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)(1+z)$,

   (b) $X = \mathbb{R}^3_+,\ f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,

   (c) $X = \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 7\sin(x+y) + 2\sin x + 7\sin y$.

5. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x,y) \to z(x,y)$ określonej niejawnie równaniem $\Phi(x,y,z) = 0$

   (a) $\Phi(x,y,z) = 2(x^3 + y^3)z^3 - 3(x^2 - y^2)z^2 + z - 1$,

   (b) $\Phi(x,y,z) = (x+z)(y+z)(1 + \frac{z}{xy}) - 8$,

   (c) $\Phi(x,y,z) = 3z^3 - 7z\cos(x+y) + \frac{20x}{x^2+1}$.