Przykład $[a^i_j]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ $a^i_j \in \mathbb{F}$.

$$[a^i_j]\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \vdots \\ \lambda^m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{j=1}^m a^1_j\lambda^j\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a^n_j\lambda^j\end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n \qquad \lambda \in \mathbb{F}^m \qquad A=[a^i_j]: \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$$

$[a^i_j] \in L(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n) \simeq M_{n,m}(\mathbb{F})$.

Dla $j=1,\dots,m$, $\bar{a}_j$ oznacza j-tą kolumnę $[a^i_j]$.
$[a^i_j] = [\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m]$. Dla $i=1,\dots,n$, $\bar{a}^i$ oznacza i-ty wiersz $[a^i_j]$. $[a^i_j] = \begin{bmatrix}\bar{a}^1\\ \vdots \\ \bar{a}^n\end{bmatrix}$

Obraz A: $\operatorname{im} A = \{A\lambda : \lambda \in \mathbb{F}^m\} \subset \mathbb{F}^n$.
$= \{\lambda^1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda^m \bar{a}_m : \lambda^i \in \mathbb{F},\ i=1,\dots,m\} =$
$\langle \bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m\rangle$.

Jądro A. $\ker A = \{\lambda \in \mathbb{F}^m : A\lambda = 0\} \subset \mathbb{F}^m$

$$A\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^1_1\lambda^1 + \dots + a^1_m\lambda^m = 0\\ \vdots \\ a^n_1\lambda^1 + \dots + a^n_m\lambda^m = 0.\end{cases}$$
– liniowy jednorodny układ równań zadany przez macierz A.

Przypomnienie: $A \in L(V,W)$ jest różnowartościowe $\Leftrightarrow$
$\ker A = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker A = 0$.
$A \in L(V,W)$ jest surjekcją $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} A = W \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} A = \dim W$.

Stwierdzenie: Jeśli $A \in L(V,W)$ jest bijekcją to $\dim V = \dim W$.

Dowód $\mathcal{E} = \{e_1,\dots,e_n\}$ - baza V, to $\{Ae_1,\dots,Ae_n\}$ jest bazą W.
Rzeczywiście: $W = \{Av : v \in V\} = \{A(\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n) : \lambda^i \in \mathbb{F}\}$
$= \{\lambda^1 Ae_1 + \dots + \lambda^n Ae_n : \lambda^i \in \mathbb{F}\} = \langle Ae_1,\dots,Ae_n\rangle$.
Liniowa niezależność: $0 = \lambda^1 Ae_1 + \dots + \lambda^n Ae_n = A(\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n) \Rightarrow$
$\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n = 0 \Rightarrow \lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$.

Definicja: liniową bijekcję $A \in L(V,W)$ będziemy nazywać izomorfizmem V i W. Mówimy, że V i W są izomorficzne.

Twierdzenie Jeśli $A \in L(V,W)$ to $\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim V$.

Dowód. Istnieje podprzestrzeń $\tilde{V} \subset V$ taka, że
$V = \ker A \oplus \tilde{V}$. Rozważmy odwzorowanie liniowe $B \in L(\tilde{V}, \operatorname{im} A)$
t. że dla $\tilde{v} \in \tilde{V}$ $B\tilde{v} = A\tilde{v}$. Wówczas B jest bijekcją.
Rzeczywiście $B(\tilde{V}) = A(V) = \operatorname{im} A$. Ponadto $B\tilde{v} = 0$ to $\tilde{v} \in \ker A \cap \tilde{V} = \{0\}$
czyli $\ker B = \{0\}$.

Zatem $\dim \tilde{V} = \dim \operatorname{im} A$. Ponadto $\dim V = \dim \ker A + \dim \tilde{V}$

a stąd $\dim V - \dim \ker A = \dim \operatorname{im} A$. $\blacksquare$

Wniosek. Niech $\dim V = \dim W$ oraz $A \in L(V, W)$.

Następujące warunki są równoważne:

(1) A jest izomorfizmem

(2) $\ker A = \{0\}$.

Rzeczywiście $(1) \Rightarrow (2)$ - było.

$(2) \Rightarrow (1)$ $\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = \dim V = \dim W$,

zatem $\operatorname{im} A = W$.

Uwaga. jeśli $A \in L(V, W)$ jest izomorfizmem to $A^{-1} \in L(W, V)$

$w = Av$, $\tilde{w} = A\tilde{v}$; $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{F}$.

$A^{-1}(\lambda w + \tilde{\lambda} \tilde{w}) = A^{-1}(\lambda Av + \tilde{\lambda} A\tilde{v}) = A^{-1} \cdot A(\lambda v + \tilde{\lambda} \tilde{v}) = \lambda v + \tilde{\lambda}\tilde{v} = \lambda A^{-1} w + \tilde{\lambda} A^{-1} \tilde{w}$

co pokazuje liniowość A^{-1}.

Przykład $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left(\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} \right.$

$\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} \in \ker A \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = \lambda^1 - \lambda^2 \\ 0 = \lambda^1 + \lambda^2 \end{matrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 \Rightarrow \lambda = 0$ i $\ker A = \{0$

$A^{-1} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$; $A^{-1}A = AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Jeśli $A \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ to mówimy, że A jest odwracalny gdy istnieje

$B \in M_{n,n}(\mathbb{F})$: $AB = BA = I_n$ gdzie $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$.

Rząd macierzy. $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$.

Rzędem wierszowym macierzy $A = [a^i_j] \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ nazywamy

$\dim \langle \bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^n \rangle$.

Rząd kolumnowy $= \dim \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m \rangle$

Twierdzenie Rząd kolumnowy A jest równy rzędowi wierszowemu.

Definicja Transpozycja macierzy $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ nazywamy macierz

$B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ t. że $b^j_i = a^i_j$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

$B \overset{\text{ozn}}{=} A^T$. Przykład $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Zauważmy, że rząd wierszowy A = rząd kolumnowy A^T

i na odwrót.

$\boxed{\text{Dowód tw}}$ A j.w. r = rząd wierszowy A c = rząd kolumnowy.

$\bar{a}^{i_1}, \ldots, \bar{a}^{i_r}$ - liniowo niezależne wiersze

$\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_c}$ - —— " —— " — kolumny

$(2) \Rightarrow (1)$ $\dim \operatorname{im} A = \dots$

Zatem $\operatorname{im} A = W_1$

Rozważmy macierz $b^k_l = a^{i_k}_{j_l}$; $B \in M_{r,c}(\mathbb{F})$.

$\boxed{\text{Obserwacja (za tydzień): } \bar b_1, \dots, \bar b_c \text{ są liniowo zależne} \Rightarrow \bar a_{j_1}, \dots, \bar a_{j_c} \text{ też.}}$

Zatem $\bar b_1, \dots, \bar b_c$ są liniowo niezależnymi wektorami.

Czyli $\bar b_1, \dots, \bar b_c$ są wekt. liniowo niezależnymi w r-wym. p.w. $\mathbb{F}^r$. Stąd $c \leq r$. Stosując transpozycję i uwagę przed dowodem dostaję nierówność odwrotną $r \leq c$ i $r = c$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 8 & 9 & 4 & 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

- rozł. σ na cykle rozłączne
- znajdź $\operatorname{sgn} \sigma$
- Oblicz σ^{2019}.