$A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n] = [a^i_j] \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$

$a_i = \bar{a}_i$ - kolumny macierzy A

$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; a^1_{\pi(1)} \cdots a^n_{\pi(n)}$

np. dla $n=5$ mamy $5! = 125$ el. sumy

własności det:

1 antysymetria

2 liniowość w każdej z kolumn

3 $\det(I_n) = 1$ $\quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$.

Wniosek 1.

$A \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ $\quad I_k \in M_{k,k}(\mathbb{F})$

$\det \begin{bmatrix} I_k & 0_{k \times n} \\ 0_{n \times k} & A \end{bmatrix} = \det A$

$0_{n \times k} \in M_{n,k}(\mathbb{F})$ - macierz zerowa

uzasadnienie: wystarczy że odwz. $A = [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n] \mapsto \det \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \mathbb{F}$ spełnia własności 1–3.

Wniosek 2. $A \in M_{k,k}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ to $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B$.

Rzeczywiście $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} A & \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

$= \det A \cdot \det B$.

Rozwinięcie Laplace'a.

Definicja

Niech $A = [a^i_j]_{i,j=1,\ldots,n}$ & $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas dopełnieniem algebraicznym elementu a^k_l nazywamy wyznacznik macierzy A z wykreślonym k-tym wierszem oraz l-tą kolumną i pomnożony przez $(-1)^{k+l}$. Oznaczamy go symbolem a^{Dl}_{k}; macierz dopełnień algebraicznych: $A^D = [a^{Dl}_k]$

A^D nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych.

Przykład $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Wówczas $A^D = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Zauważmy że $A \cdot A^D = \begin{bmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I_{2 \times 2}$ $\qquad \det A = ad - bc$.

Twierdzenie.

Jeśli A^D jest jak wyżej to $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a^i_k a^{Dk}_i}_{\text{rozwinięcie Laplace'a wzgl. i-tego wiersza}} = \det A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a^{Dj}_k a^k_j}_{\text{rozwinięcie Lap. wzgl. j-tej kolumny}}$

dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Dowód: $\det A = \det [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_n] = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \det \begin{bmatrix} a^1_1 & \cdots & 0 & \cdots & a^1_n \\ a^i_1 & \cdots & 1 & \cdots & a^i_n \\ a^n_1 & \cdots & 0 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix} \leftarrow i$

$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ - b. kanoniczna; $\bar{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i$ $\qquad e_i$ (j)

$= \sum_{i=1}^{n} a^i_j \det \begin{bmatrix} a^1_1 & \cdots & 0 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & 0 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \cdot (-1)^{j-1+i-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & A^i_j & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

redukuję kolumnowo.

$= \sum_{i=1}^{n} a^{Dj}_i a^i_j$ - rozwinięcie wzgl. j-tej kolumny.

Uwaga: Jeśli $j \neq k$ (np $j<k$) to $\sum_{i=1}^{n} a^{Dk}{}_i \, a^i{}_j = 0$.

Rzeczywiście $\sum_{i=1}^{n} a^{Dk}{}_i \, a^i{}_j = \det[\bar{a}_1, .., \bar{a}_j, .., \bar{a}_j, .., \bar{a}_n] = 0$.

$A^D \cdot A$ rozwinięcie Laplace'a wzg. k-tej kol. j-ta k-ta kolumna.

Wniosek:

$A^D \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{1}$.

Zatem, gdy $\det A \neq 0$ to $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$.

Wzory Cramera.

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, $\det A \neq 0$. $b \in \mathbb{F}^n$. Rozważmy r-nie na $x \in \mathbb{F}^n$ $Ax = b$. Wówczas $x = A^{-1} b$. Dobra nowina: nie musimy odwracać A!!

$A = [\bar{a}_1, .., \bar{a}_n]$, $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ to $b = x^1 \bar{a}_1 + x^2 \bar{a}_2 + \ldots + x^n \bar{a}_n$ (*)

Przepiszmy (*) w innej formie: $(x^1 \bar{a}_1 - b) + x^2 \bar{a}_2 + \ldots + x^n \cdot \bar{a}_n = 0$;

w szczególności układ $(x^1 \bar{a}_1 - b, \bar{a}_2, .., \bar{a}_n)$ jest l. zależny.

Zatem $\det(x^1 \bar{a}_1 - b, \bar{a}_2, .., \bar{a}_n) = 0$

Stąd $x^1 \det[\bar{a}_1, .., \bar{a}_n] = \det[b, \bar{a}_2, .., \bar{a}_n]$.

Wniosek $\left\{ x^k = \frac{\det[\bar{a}_1, .., \overset{\text{k-ta kolumna}}{b}, .., \bar{a}_n]}{\det A} \right.$ $k = 1, .., n$.

Wzory Cramera.

Przestrzenie sprzężone (dualne).

Definicja Niech V będzie p-nią wekt. nad $\mathbb{F}$, $\dim V < \infty$.

Wówczas p-ń $L(V, \mathbb{F})$ nazywamy przestrzenią sprzężoną V i oznaczamy symbolem V^*. Elementy V^* nazywamy funkcjonałami liniowe.

Przykład

$V = \mathbb{F}^n$; $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$ Jak "wygląda" $\phi \in V^*$?

$\phi \in L(\mathbb{F}^n; \mathbb{F}) \simeq M_{1 \times n}(\mathbb{F})$. Czyli $\phi = [\phi_1, .., \phi_n]$.

gdzie $\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot v^i \in \mathbb{F}$.

Przykład 2.

$V = \mathbb{R}_n[\cdot]$. Przykłady $\phi \in V^*$:

① ustalmy $k \in \mathbb{N}$ $\phi^k(w) = w^{(k)}(0)$.

② $\psi(w) = \int_0^1 w(t)\,dt$.

$\psi, \phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n \in V^*$

Uwaga $\dim V^* = \dim L(V, \mathbb{F}) = \dim V \dim \mathbb{F} = \dim V.$

Baza dualna.

Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą V.

Rozważmy funkcjonały liniowe $e^k \in V^*$ dane wzorem

$$e^k(v) = v^k \quad \text{gdzie } v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n$$

Twierdzenie

Układ $\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^n)$ jest bazą V^* (którą nazywa się bazą sprzężoną do bazy $\mathcal{E}$.)

Dowód.

Przypuśćmy, że $\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_n e^n = 0$. Wówczas

$$0 = (\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_n e^n)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_{i,k} = \lambda^k,$$

dla wszystkich $k \in \{1, \ldots, n\}$

A zatem $(e^1, \ldots, e^n)$ są lnz. $\dim V^* = n \Rightarrow \mathcal{E}^*$ jest bazą.

$\boxed{\text{Przestrzeń } V^{**}}$ $\quad V^{**} := (V^*)^*$

Uwaga. Jeśli $v \in V$ (ustalony wektor) to odwzorowanie $V^* \ni \Phi \longmapsto \Phi(v) \in \mathbb{F}$ ($\kappa(v)$) jest liniowe w Φ.

$$\underbrace{(\mu \Phi + \lambda \Psi)(v)}_{\kappa(v)(\mu \Phi + \lambda \Psi)} = \mu \Phi(v) + \lambda \Psi(v) = \mu\, \kappa(v)(\Phi) + \lambda\, \kappa(v)(\Psi)$$