V – nad ciałem $\mathbb{F}$.

V - p-ń wektorowa, $\dim V < \infty$, V –

$\varphi \in V^*$ - p-ń dualna, p-ń wektorowa $\dim V^* = \dim V$.

$\varphi: V \to \mathbb{F}$ - liniowe.

Przykład

$V = \mathbb{R}_n[\cdot]$, $\mathcal{E} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ - baza $\quad w = a_0 1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

$k \in \{0, n\}$, $\varphi^k \in V^*$: $\varphi^k(w) = a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} w(0)$. $\quad \varphi^k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=0}$.

Zauważmy, że $\varphi^i(t^j) = \delta_{ij}$ $\quad \mathcal{E}^* = \{\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ - baza dualna przy V^*.

Druga sprzężona. Niech $w \in \mathbb{R}_n[\cdot]$ np: $w = 1 + 2t$.

Zauważmy odwzorowanie $V^* \ni \varphi \longmapsto \varphi(w) \in \mathbb{R}$.

jest liniowe w φ. Zauważmy, że $\varphi^k(w) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 0 & k \neq 0, 1 \end{cases}$.

Ogólnie $\varphi = \lambda_0 \varphi^0 + \ldots + \lambda_n \varphi^n$ to

$\varphi \longmapsto \varphi(w) = \lambda_0 + 2\lambda_1$.

Podsumowując otrzymujemy odwzorowanie $K_V: V \to V^{**}$ t. że

$K_V(w)(\varphi) = \varphi(w)$ dla wszystkich $w \in V$ oraz $\varphi \in V^{**}$.

Obserwacja 1: K_V jest liniowe.

Obserwacja 2: K_V jest izomorfizmem.

Lemat

Niech $T: V \to W$ będzie liniowe. Następujące warunki są równoważne.

① T jest izomorfizmem (dowolną)

② Jeśli $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą V to $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$ jest bazą W.

Dowód

①⇒② $0 = \lambda_1 T(e_1) + \ldots + \lambda_n T(e_n) = T(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)$ więc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$

bo T jest izomorfizmem. W końcu $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ bo $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$

jest bazą. Skoro $\forall w \in W \ \exists v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in V$ t. że $T(v) = w$

to $w = \lambda_1 T(e_1) + \ldots + \lambda_n T(e_n)$ więc $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ jest bazą.

②⇒①. $Tv = 0$ dla $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Wówczas $\lambda_1 T(e_1) + \ldots + \lambda_n T(e_n) = 0$

a więc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ & $v = 0$. Czyli $\ker T = \{0\}$.

Niech $w = \lambda_1 T(e_1) + \ldots + \lambda_n T(e_n) = T(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) \Rightarrow \operatorname{im} T = W$.

Twierdzenie

V - p-ń, $\dim V < \infty$. $K_V: V \to V^{**}$ t. że $K_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$

gdzie $v \in V$ & $\varphi \in V^*$. Wówczas K_V jest liniowym izomorfizmem

Dowód. $K_V(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(\varphi) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2) = \lambda_1 K_V(v_1)(\varphi) + \lambda_2 K_V(v_2)(\varphi)$

$= (\lambda_1 K_V(v_1) + \lambda_2 K_V(v_2))(\varphi)$. Czyli K_V jest liniowe. $\to K_V$ jest izomorfizmem.

Ustalmy bazę $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ przy V i dualną $\mathcal{E}^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

Obliczmy $K_V(e_i)(\varphi_j) = \varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$ zatem $(\mathcal{E}^*)^* = \{K_V(e_1), \ldots, K_V(e_n)\}$

Notacja: $\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle = \langle v, \varphi \rangle = \kappa_V(v)(\varphi) = \langle \kappa_V(v), \varphi \rangle$.

Sprzężenie odwzorowań liniowych.

Definicja/twr.

Niech V, W – p-nie nad $\mathbb{F}$ oraz $A \in L(V, W)$ i $\varphi \in W^*$. Wówczas odwzorowanie $V \ni v \longmapsto \varphi(A(v)) \in \mathbb{F}$ jest funkcjonałem liniowym, który oznaczamy $A^*(\varphi) \in V^*$. Z definicji (pierwszej) mamy $A^*\varphi = \varphi \circ A$. Zauważmy, że $(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ A = \lambda_1\varphi_1 \circ A + \lambda_2\varphi_2 \circ A = \lambda_1 A^*\varphi_1 + \lambda_2 A^*\varphi_2$. W takim razie $W^* \ni \varphi \longmapsto \varphi \circ A \in V^*$ jest liniowe i będziemy je oznaczać symbolem $A^* \in L(W^*, V^*)$.

$\langle A^*\varphi, v \rangle = \langle \varphi, Av \rangle$.

Twierdzenie

① $B: V \to W$, $A: W \to U$ to $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

② Przy utożsamieniu $W \simeq W^{**}$ (przez κ_V) $A^{**} = A$.

③ Jeśli $\mathcal{E}$ jest bazą W i $\mathcal{F}$ bazą U oraz $[a_{ij}] = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ i $[b_{ji}] = [A^*]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{F}^*}$ to $b_{ij} = a_{ji}$.

$[b_{ji}] = [a_{ij}]^T$.

① $(A \circ B)^*(\varphi) = \varphi \circ (A \circ B) = (\varphi \circ A) \circ B = (A^*\varphi) \circ B = B^*(A^*\varphi) = (B^* \circ A^*)(\varphi)$ dla wszystkich $\varphi \in U^*$.

② $\langle \varphi, Aw \rangle = \langle A^*\varphi, w \rangle = \langle w, A^*\varphi \rangle = \langle (A^*)^* w, \varphi \rangle = \langle \varphi, (A^*)^* w \rangle$ dla wszystkich $w \in W$ i $\varphi \in U^*$. A więc $A = (A^*)^* = A^{**}$.

③. $a_{ij} \longleftrightarrow Ae_j = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$

λ_i zatem jeśli $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \mathcal{E}^*$ oraz $(\psi_1, \dots, \psi_m) = \mathcal{F}^*$ to $a_{ij} = \langle \psi_i, Ae_j \rangle =$

$= \langle A^*\psi_i, e_j \rangle = \langle e_j, A^*\psi_i \rangle = b_{ji}$. $\Rightarrow [a_{ij}]^T = [b_{ji}]$.