www.fuw.edu.pl\~pkasp

Formy dwuliniowe na przestrzeniach wektorowych.

Przypomnienie:

V - p-ń wektorowa, $\dim V < \infty$, $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$)

$V^* = L(V, \mathbb{F}) = \{ \phi : V \to \mathbb{F} \ \ \phi$ - liniowe $\}$ Terminologia ϕ jest formą liniową

Przykład: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \phi\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 - 2x^2 + x^3$

Definicja Odwzorowanie $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ nazywamy formą dwuliniową na V jeśli

(1) $\Omega(v, \lambda_1 \tilde{v}_1 + \lambda_2 \tilde{v}_2) = \lambda_1 \Omega(v, \tilde{v}_1) + \lambda_2 \Omega(v, \tilde{v}_2) \quad \forall_{v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$

(2) $\Omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \tilde{v}) = \lambda_1 \Omega(v_1, \tilde{v}) + \lambda_2 \Omega(v_2, \tilde{v}) \quad \forall_{v_1, v_2, \tilde{v} \in V, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}}$.

Przykład $V = \mathbb{R}^2$ Wszystkie formy 2-liniowe na V są postaci $\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = a_{11} x^1 y^1 + a_{12} x^1 y^2 + a_{21} x^2 y^1 + a_{22} x^2 y^2$

dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$\Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = [x^1, x^2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Definicja Niech $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą p-ni V. Wówczas macierz $n \times n$ postaci $[\Omega(e_i, e_j)]_{i,j \in 1, \dots, n}$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej w bazie $\mathcal{E}$ i oznaczamy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$

Przykład $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, Ω jak poprzednio

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Jeśli $v \in V$ ma w bazie $\mathcal{E}$ współrzędne $\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$ a $\tilde{v} \in V$ $\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}$

to $\Omega(v, \tilde{v}) = \Omega\left(\sum_i \lambda^i e_i, \sum_j \tilde{\lambda}^j e_j\right) =$

$$= \sum_{i,j} \lambda^i \Omega(e_i, e_j) \tilde{\lambda}^j = [\lambda^1, \dots, \lambda^n] [\Omega]_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}^n \end{bmatrix}.$$

Reguła transformacyjna dla form dwuliniowych

Niech $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ będzie bazą V. Jeśli $\tilde{e}_i = \sum_j a^j_i e_j$ to $[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}}$ jest dana wzorem $\underbrace{\Omega(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)}_{[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}, ij}} \overset{\text{Einst. conv.}}{=} \Omega(a^k_i e_k, a^l_j e_l)$

$$= a^k_i \, \Omega(e_k, e_l) \, a^l_j = [a^k_i]^T [\Omega]_{\mathcal{E}, kl} [a^l_j] \quad (*)$$

Zauważmy $[a^j_i] = [id]^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{E}}}$ i wzór $(*)$ zapisuje się w postaci $[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{E}}}\right)^T [\Omega]_{\mathcal{E}} [id]^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{E}}}$

Przykład:

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad \Omega\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}\right) = x^1 y^1 + x^2 y^2$.

$[\Omega]_{kan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Rozważmy bazę $\tilde{\mathcal{E}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$[\Omega]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Reguła transformacyjna

$$[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}} = A^T [\Omega]_{\mathcal{E}} A \quad \text{gdzie} \quad A = [id]^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{E}}}.$$

Zauważmy, że $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ jest odwracalne oraz $A^{-1} = [id]^{\tilde{\mathcal{E}}}_{\mathcal{E}}$. W szczególności $\det[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}} = \det(A)^2 \det[\Omega]_{\mathcal{E}}$ i skoro $\det A \neq 0$ to $\det[\Omega]_{\mathcal{E}} = 0 \iff \det[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}} = 0$.

Definicja: Mówimy, że Ω jest niezdegenerowana gdy w pewnej bazie (a wówczas w każdej) $\det[\Omega]_{\mathcal{E}} \neq 0$.

Przypomnienie: jeśli $B = CDE$, gdzie $B, \dots, E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ oraz C i E są odwracalne to $rk(B) = rk(D)$.

$$rk(B) = \dim im(CDE) = \dim(CD\underbrace{E\,\mathbb{F}^n}_{})$$

$$\dim(CD\mathbb{F}^n) = \dim \underbrace{D\,\mathbb{F}^n} = rk D.$$

Zatem $rk[\Omega]_{\mathcal{E}} = rk[\Omega]_{\tilde{\mathcal{E}}}$.

Definicja Rzędem formy Ω nazywamy rząd macierzy $[\Omega]_{\mathcal{E}}$ w dowolnej bazie $\mathcal{E}$ p.l. V.

Przykład (a) $V = \mathbb{R}_n[\cdot]$ i niech $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t) \cdot w_2(t)$.

Wykazać, że Ω jest niezdegenerowane i ma rząd $n+1$

ćwicz. – (b) $\Psi(w_1, w_2) = \sum_{i=0}^{k} w_1(i) w_2(i)$. Wykazać, że rząd Ψ jest równy $\min(k+1, n+1)$.

Forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ pozwala zdefiniować odwzorowanie $T_\Omega : V \to V^*$ takie, że

$$\langle T_\Omega(v), \hat{v} \rangle := \Omega(v, \hat{v}).$$

Zauważmy, że $[\Omega]_{\mathcal{E}, ij} = \Omega(e_i, e_j) = \langle T_\Omega(e_i), e_j \rangle = [T_\Omega]^{\mathcal{E}^*}_{\mathcal{E}, ij}$

W szczególności $rk\,\Omega = rk(T_\Omega)$. Ponadto Ω jest niezdegenerowana $\iff$ T_Ω jest bijekcją $\iff \ker T_\Omega = \{0\} \iff$ $\dim V = \dim im T_\Omega$.

$\dim V = \dim V^*$

Weźmy $\Omega(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t) w_2(t)\, dt$

Przypuśćmy, że Ω jest zdegenerowana. Wówczas istnieje wielomian $w \in \mathbb{R}_n[\cdot]$ t. że $T_\Omega(w) = 0$. Zatem $0 = \langle T_\Omega(w), w \rangle = \int_0^1 w^2(t)\, dt$.

Czyli $w(t) = 0$ dla $t \in [0,1]$, a stąd w jest wielomianem zerowym i ostatecznie $rk\,\Omega = rk\,T_\Omega = n+1$.

Definicja: Mówimy, że forma dwuliniowa $\Omega : V \times V \to \mathbb{F}$ jest (1) symetryczna jeśli $\Omega(v, \hat{v}) = \Omega(\hat{v}, v)$.

(2) antysymetryczna jeśli $\Omega(v, \hat{v}) = -\Omega(\hat{v}, v)$. $\forall\, v, \hat{v} \in V$.

Przykład 1) Ω i Ψ na $\mathbb{R}_n[\cdot]$ j.w. są symetryczne

2) $\boxed{H}_{\pm}(w, \hat{w}) = w(0)\hat{w}(1) \pm \hat{w}(0) w(1)$ dla $-$ – antysymetria, $+$ – symetria.

Stwierdzenie: Dla każdego Ω istnieją Ω_a i Ω_s gdzie Ω_a – symetryczna Ω_s – antysymetryczna oraz $\Omega = \Omega_a + \Omega_s$. Ponadto Ω_a, Ω_s – są jednoznacznie wyznaczone. Dowód: Sprawdzić, że $\Omega_a(v, \hat{v}) := \frac{1}{2}(\Omega(v, \hat{v}) - \Omega(\hat{v}, v))$; $\Omega_s = \frac{1}{2}(\Omega(v, \hat{v}) + \Omega(\hat{v}, v))$