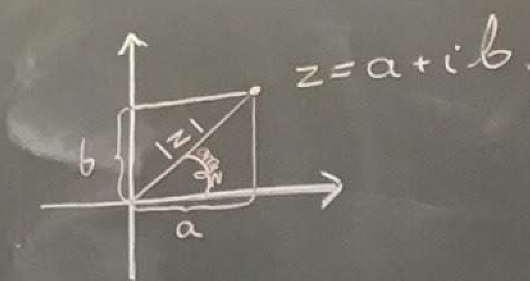
$z \in \mathbb{C}$ ← (ciało) liczb zespolonych

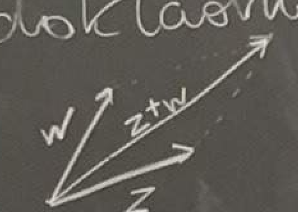
↑ liczba zespolona $z = a + ib$

$a = \mathrm{Re}(z) \quad b = \mathrm{Im}(z)$



$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \varphi = \arg z$

$\arg z$ jest wyznaczony z dokładnością do wielokrotności 2π.



Niech $w = |w|\cdot(\cos\psi + i\sin\psi)$. W takim razie

$$z\cdot w = |z|\,|w|\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

Stwierdzenie:

(1) $|zw| = |z|\cdot|w|$

(2) $\arg z\cdot w = \arg z + \arg w$.

Notacja wykładnicza $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

Czyli $e^{i\varphi} \stackrel{def}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Własności $|e^{i\varphi}| = 1$, $\underbrace{\quad}_{\arg e^{i\varphi} = \varphi}$ $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}$.

Sprzężenie zespolone liczby $z \in \mathbb{C}$.

Jeśli $z = a+ib$ to liczbę $a-ib$ nazywamy sprzężeniem zespolonym z i oznaczamy $\bar{z}$.

Stwierdzenie

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

(3) $|z|^2 = \bar{z}z$.

Dowód $z = a+ib \quad w = c+id$.

(1) $\overline{z+w} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d)$
$= a-ib+c-id = \bar{z}+\bar{w}$.

(2) $\overline{zw} = \overline{ac-bd+i(ad+bc)} =$
$= ac-bd-i(ad+bc) = (a-ib)(c-id)$
$= \bar{z}\cdot\bar{w}$.

(3) $\bar{z}z = (a-ib)(a+ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

Uwaga.

- $|\bar{z}| = |z|$
- $\arg\bar{z} = -\arg z$

W szczególności $\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$.

Definicja Niech $w \in \mathbb{C}$. Wówczas zbiór $\{z \in \mathbb{C} : z^n = w\}$ oznaczamy $\sqrt[n]{w}$. Elementy $\sqrt[n]{w}$ nazywamy pierwiastkami stopnia n liczby w.

Stwierdzenie:
Jeśli $w = |w| e^{i\psi}$ to $\sqrt[n]{w} = \left\{ |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\psi + 2k\pi}{n}} : k \in 0, 1, \dots, n-1 \right\}$

Dowód: Niech $z = |z| e^{i\varphi}$; $z \in \sqrt[n]{w} \iff z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |w| e^{i\psi}$

$\iff |z|^n = |w|$ & $n\varphi = \psi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff |z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ & $\varphi = \frac{\psi + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$

wystarczy $k = 0, 1, \dots, n-1$. Bo inne k dają fazy φ takie same z dokładnością do wielokrotności 2π.

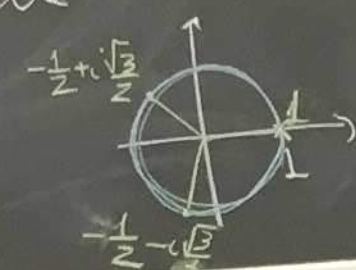
Przykład:

(a) $\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{e^{i\pi}} = \left\{ e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{3}{2}i\pi} \right\}$

$= \{ i, -i \}$

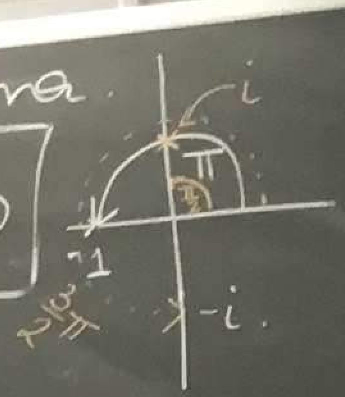
(b) $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{e^{i0}} = \left\{ 1, e^{\frac{2\pi i \cdot 1}{n}}, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{n}}, \dots, e^{\frac{2\pi i \cdot (n-1)}{n}} \right\}$.

Dla $n = 3$. $\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i} \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$



Wzór Eulera.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$



$z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ wynika ze wzoru

Wzór de Moivre:
$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi + \psi)}$

Funkcja $e^{i\varphi}$ i jej związek z funkcjami trygonometrycznymi:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \implies \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$

Zauważmy $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ oraz $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

(wystarczy wstawić $z = a + ib$)

W szczególności $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + \overline{e^{i\varphi}}}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

oraz $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Uwaga: wszystkie tożsamości wynikają z poprzedniej obserwacji oraz z tożsamości wykładniczej $e^{i(\varphi + \psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi}$.

Przykład: $\sin(2\varphi) = 2 \sin\varphi \cos\varphi$.

"różnica kwadratów"
$z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$

$$\sin(2\varphi) = \frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{2i} = \frac{(e^{i\varphi})^2 - (e^{-i\varphi})^2}{2i} = 2 \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2i} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{2}$$

$= 2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi$.

Stwierdzenie (Nierówność trójkąta dla modułu). nierówn. Δ

Dla każdego $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

oraz $|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$

$z_1\bar{z}_2 = \overline{\bar{z}_1 z_2}$

__Dowód__ $|z_1+z_2|^2 = (\bar{z}_1+\bar{z}_2)(z_1+z_2) = \bar{z}_1 z_1 + \underbrace{\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1}_{2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)} + \bar{z}_2 z_2$

$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \le$

$|z_1|^2 + 2|\bar{z}_1 z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 =$

$= (|z_1|+|z_2|)^2.$

Druga nierówność wynika z pierwszej:

$|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2|$

a więc $|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|$. Zamieniając z_1 i z_2 miejscami dostajemy: $|z_2|-|z_1| \le |z_1-z_2|$.

W takim razie $\big||z_2|-|z_1|\big| \le |z_1-z_2|$.

Wielomiany o współczynnikach zespolonych.

Jeśli $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ to funkcję $w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wzorem $w(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ nazywamy wielomianem zmiennej zespolonej.

Twierdzenie Jeśli $w(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ spełnia $w(z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ to $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

Dowód indukcja ze względu na $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tożsamość $(z+1)^k - z^k =$ " $k \cdot z^{k-1}$ + potęgi $z^{k-2}, z^{k-3}, \dots, z^0$ "

$n=0$. $w(z) = b_0 = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow b_0 = 0$.

$a_n = 0$

Zał. że tw. zachodzi dla $\boxed{n-1}$

Niech $w(z) = a_0 + \dots + a_n z^n \equiv 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Wówczas $u(z) = w(z+1) - w(z) \equiv 0$.

$0 \equiv u(z) = a_1((z+1)-z) + a_2((z+1)^2 - z^2) + \dots + \overbrace{a_n((z+1)^n - z^n)}^{n a_n z^{n-1} + \dots} =$

$= b_0 + b_1 z + \dots + n a_n z^{n-1}$. Z zał. indukcyjnego $a_n = 0$.