$A \in \mathrm{End}(V)$, wektory własne $v \in V \setminus \{0\}: Av = \lambda v$ ← wektor własny

↑ wartość własna

wielomian charakterystyczny endomorfizmu A . $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$

$V_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$, $\lambda \in Sp(A)$.

Uwaga: $u(t)$ - wielomian st n . $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

Endomorfizm postaci $a_0 \mathbb{1} + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \in \mathrm{End}(V)$ oznaczamy $u(A)$. Własności (a) $(u_1 + u_2)(A) = u_1(A) + u_2(A)$.

(b) $(u_1 u_2)(A) = u_1(A) \, u_2(A)$. Przykład: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$

$$w_A(A) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \;!!$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

$\forall A \in \mathrm{End}(V)$ mamy $w_A(A) = 0$.

Dowód $\mathcal{E}$ - baza V: $\mathfrak{a} = [a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

$[w(A)]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = w([A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})$ dla dowolnego $w \in \mathbb{F}_k[\cdot]$.

Zatem wystarczy udowodnić to dla macierzy $\mathfrak{a}$.

Przypomnienie: macierz dopełnień alg. $\mathfrak{a}^D \mathfrak{a} = \det(\mathfrak{a}) \mathbb{1}$

w szczególności $(\mathfrak{a} - \lambda \mathbb{1})^D (\mathfrak{a} - \lambda \mathbb{1}) = \det(\mathfrak{a} - \lambda \mathbb{1}) \mathbb{1} = w_A(\lambda) \mathbb{1}$. (*)

Uwaga: $n = \dim V$ to istnieją $b_0, \ldots, b_{n-1} \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ t. że

$(\mathfrak{a} - \lambda \mathbb{1})^D = b_0 + \lambda b_1 + \ldots + \lambda^{n-1} b_{n-1}$. (**)

na przykład (notacja: $\det[a_{ij}] = |a_{ij}|$)

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}, & +|\ \ | \text{ itd.} \\ -|\ \ | & \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}, & -|\ \ | \\ +|\ \ | & -|\ \ | & \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Oznaczenie $w_A(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \ldots + c_n \lambda^n$. $w_A(\mathfrak{a}) = c_0 \mathbb{1} + c_1 \mathfrak{a} + \ldots + c_n \mathfrak{a}^n$.

(*) oraz (**) $(b_0 + b_1 \lambda + \ldots + b_{n-1} \lambda^{n-1})(\mathfrak{a} - \lambda \mathbb{1}) = c_0 \mathbb{1} + \lambda c_1 \mathbb{1} + \ldots + \lambda^n c_n \mathbb{1}$.

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda^0 : b_0 \mathfrak{a} & = c_0 \mathbb{1} & | \, \mathfrak{a}^0 \\ \lambda^1 : b_1 \mathfrak{a} - b_0 & = c_1 \mathbb{1} & | \, \mathfrak{a}^1 \\ \vdots & & \\ \lambda^{n-1} : b_{n-1} \mathfrak{a} - b_{n-2} & = c_{n-1} \mathbb{1} & | \, \mathfrak{a}^{n-1} \\ \lambda^n : -b_{n-1} & = c_n \mathbb{1} & | \, \mathfrak{a}^n \end{array}\right\} \text{mnożymy przez potęgi } \mathfrak{a} \text{ i sumujemy stronami.}$$

$$\underbrace{+ b_0 \mathfrak{a} + (b_1 \mathfrak{a}^2 - b_0 \mathfrak{a}) + \ldots + (b_{n-1} \mathfrak{a}^n - b_{n-2} \mathfrak{a}^{n-1}) - b_{n-1} \mathfrak{a}^n}_{0} = c_0 \mathbb{1} + c_1 \mathfrak{a} + \ldots + c_n \mathfrak{a}^n$$

$= c_0 \mathbb{1} + c_1 \mathfrak{a} + \ldots + c_n \mathfrak{a}^n$. ☒

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

Przykład. x_n - ciąg Fibonacciego $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$.

$u(\lambda) = \lambda^n$. $u(A) = ?$

$\lambda^n = u(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + r(\lambda)$, $r(\lambda) = a\lambda + b$. $\Rightarrow$ $A^n = \underline{aA + b\mathbb{1}}$

Wyznaczamy a i b: wartości własne wielomianu char.: $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_+^n = a\lambda_+ + b$,
$\lambda_-^n = a\lambda_- + b$.
$\Rightarrow$ $a = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ $b = \ldots$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Zał.: $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, V nad $\mathbb{C}$.

Ustalmy $A \in End(V)$ $\quad sp(A)=\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

$$w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\lambda)^{n_i}, \quad w_j(\lambda)=\prod_{i\neq j}^{r} (\lambda_i-\lambda)^{n_i}$$

Własności: (a) $j_1 \neq j_2$ to $\exists\, u \in \mathbb{C}_m[\cdot]$ $\quad w_{j_1}(\lambda)\, w_{j_2}(\lambda) = u(\lambda)\, w_A(\lambda)$

(b) $NWD(w_1, \dots, w_r)=1 \Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}[\cdot]$

$$1 \overset{\checkmark}{=} v_1 \cdot w_1 + \dots + v_r \cdot w_r.$$

Zdefiniujmy $P_j = v_j(A) \cdot w_j(A)$ $\quad j=1, \dots, r$.

Własności rodziny $\{P_1, \dots, P_r\}$

(i) $\sum_{j=1}^{r} P_j \overset{\checkmark}{=} 1$, (ii) $j_1 \neq j_2$ $\quad P_{j_1} P_{j_2} = v_{j_1}(A)\, v_{j_2}(A)\, w_{j_1}(A)\, w_{j_2}(A) = 0$

(iii) $P_i^2 = P_i \sum_{j=1} P_j = P_i$. (iv) $V_i := im\, P_i$ wówczas $V = \bigoplus_{i=1} V_i$

$$v = \underbrace{P_1 v}_{\in V_1} + \dots + \underbrace{P_r v}_{\in V_r} \quad \& \text{ jeśli } v \in V_{j_1} \cap V_{j_2} \Rightarrow P_{j_1} v = P_{j_1} P_{j_2} v = 0.$$

(v) V_j jest niezmiennicza na działanie A.

gdyż $A P_j = A\, v_j(A) w_j(A) = v_j(A) w_j(A) \cdot A = P_j A$

a zatem jeśli $v \in V_j$ to $Av = A P_j v = P_j A v \in V_j$

(vi) $V_j = \ker\left((A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j}\right)$. $\quad v \in V_j \Rightarrow v = v_j(A) w_j(A) v \Rightarrow (A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j} v =$

$= v_j(A)\, w_j(A) (A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j} v$

$v_j(A) \underbrace{(\cdot 1)^{n_j} w_A(A)}\, v = 0. \Rightarrow v \in \ker(A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j}$

$(A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j} v = 0 \Rightarrow$

$v = \underset{0}{P_1 v} + \dots + \underset{0}{P_j v} + \dots + \underset{0}{P_r v} = P_j v \in V$

$i \neq j$ $\quad P_i v = s_i(A) \cdot (A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j} v = 0$ dla pewnego $s_j \in \mathbb{C}[\cdot]$

Definicja Przy powyższych oznaczeniach $V_j = \ker(A-\lambda_j 1\!\!1)^{n_j}$ nazywamy podprzestrzenią pierwiastkową A.

Twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe