Def. Mówimy, że macierz $A \in M_n(\mathbb{F})$ jest diagonalizowalna jeśli istnieje baza $\mathcal{E}$ p-ni $\mathbb{F}^n$ t. że $[A]_{\mathcal{E}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, tzn $\boxed{A e_k = \lambda_k e_k}$

Jeśli $C = [\mathrm{id}]^{st}_{\mathcal{E}}$ to $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix} = C^{-1} A C$

Wniosek: Macierz A jest diagonalizowalna jeśli jeśli $\mathbb{F}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych A.

Antyprzykład $A = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ nie jest macierzą diagonalizowalną

$w_A = \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} = (1-\lambda)^2$ $\mathrm{Sp}A = \{1\}$.

$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \right\rangle$ czyli $\mathbb{C}^2$ nie posiada bazy złożonej z wektorów własnych A.

$\lambda = 1$, $n_1 = 2$. $V_\lambda = \ker(A - \lambda\mathbb{1})^{n_1} = \ker(A - \mathbb{1})^2 = \ker\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}^2$
$= \ker\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbb{F}^2$.

Twierdzenie: V – p-ń wektorowa nad $\mathbb{C}$, $A \in L(V)$, $\mathrm{Sp}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ i niech $w_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$

Zdefiniujmy $V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$. Wówczas $AV_i \subseteq V_i$, $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$, $\dim V_i \overset{?}{=} n_i$

Wniosek: $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, tzn pierwsze n_1 wektorów $\mathcal{E}$ jest bazą V_1, kolejne n_2 jest bazą V_2 i t.d. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ t. że $[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}\boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{A_k}\end{bmatrix}$ $Ae_1 = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_{n_1} e_{n_1}$

Dowód równości $n_i = \dim V_i$. Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda\mathbb{1})$.
Wtedy $w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda\mathbb{1}) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda)$.
Niech $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tzn $\exists\, \lambda_j \in \mathrm{sp}(A)$ t. że $\lambda = \lambda_j$. Wtedy $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ zatem $i = j$. Czyli $w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i}$. Zatem $\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i} = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i} \Rightarrow n_i = \dim V_i$.

Przykład

$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t)\end{bmatrix} \begin{matrix} = 2y(t) + 3z(t) \\ = x(t) + 3y(t) + 5z(t) \\ = -x(t) - 2y(t) - 4z(t) \end{matrix} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{bmatrix}$

$\dot{v}(t)$ $\qquad A \cdot v(t)$

$\Big\}\ \boxed{v(t) = e^{At} \cdot v(0)}$, $e^{At} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$

Uwaga $\dot{u} = a u \Rightarrow u = e^{at} \cdot u_0$, $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$

Obliczyć e^{At}: rozważmy funkcję $f: \lambda \longmapsto e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$
chcemy obliczyć $f(A)$ gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

Stwierdzenie. Niech f będzie funkcją analityczną oraz $w \in \mathbb{C}_n[\cdot]$ wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz $r \in \mathbb{C}_{n-1}[\cdot]$: $f = w q + r$

po wstawieniu $\tilde{q}$: $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_{k+1})^{n_{k+1}} \tilde{\tilde{q}} + r$

gdzie $r(\lambda) = \underset{\mathbb{C}_{n_1+\ldots+n_k-1}[\cdot]}{\tilde{r}(\lambda)} + \underbrace{\hat{r}(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_k)^{n_k}}_{\mathbb{C}_{n_{k+1}+n_1+n_2+\ldots+n_k-1}} \in \mathbb{C}_{n_1+\ldots+n_{k+1}-1}[\cdot]$.

Zastosowanie powyższego i tw Cayleya-Hamiltona.

$f(\lambda) = q(\lambda) \cdot w_A(\lambda) + r(\lambda)$. ; $w_A(A) \overset{?}{=} 0$.

Zatem $f(A) = q(A) \cancel{w_A(A)} + r(A) = r(A)$.

$w_A(\lambda) = (1-\lambda)^1 (1+\lambda)^2$ $sp(A) = \{1, -1\}$ $n_1 = 1$, $n_2 = 2$.

(**) $e^{t\lambda} = q(\lambda) \cdot (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Jak obliczyć $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(**) $\lambda = 1$: $e^t = a + b + c$.

$\lambda = -1$: $e^{-t} = a - b + c$.

$te^{-t} = -2a + b$.

$te^{\lambda t} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = q'(\lambda) \cdot w(\lambda) + q \cdot w'(\lambda) + 2a\lambda + b$

$\Downarrow$ obliczamy a, b, c. $e^{tA} = aA^2 + bA + c = \begin{bmatrix} \ldots & & \cdot \\ & & \cdot \\ & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Kartkówka:

Oznaczmy $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wykazać, że (f_1, f_2, f_3) jest bazą $\mathbb{R}^3$ i znaleźć bazę dualną $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ p-ni $(\mathbb{R}^3)^*$ i znaleźć rozkład $[3, 2, 1] \in (\mathbb{R}^3)^*$ w tej bazie.

Wniosek: $\mathcal{E}$ będzie bazą V zgodną z rozkładem $V = \bigoplus V_i$, tzn pierwsze n_1 wektorów $\mathcal{E}$ jest bazą V_1, kolejne n_2 jest bazą V_2 itd. Wówczas istnieją macierze $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ t. że
$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$
$Ae_1 = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_{n_1} e_{n_1}$

Dowód równości $n_i = \dim V_i$. Niech $w_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda \mathbb{1})$.

Wtedy $w_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{1}) = \prod_{i=1}^{k} w_i(\lambda)$.

Niech $\lambda \in Sp(A_i)$. Zauważmy, że wówczas $\lambda \in Sp(A)$ tzn $\exists \lambda_j \in sp(A)$ t. że $\lambda = \lambda_j$. Wtedy $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ zatem $i = j$. Czyli

$w_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i}$. Zatem $\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{n_i} = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{\dim V_i} \Rightarrow n_i = \dim V_i$. $\blacksquare$

Przykład

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{\dot{v}(t)} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} = 2y(t) + 3z(t) \\ = x(t) + 3y(t) + 5z(t) \\ = -x(t) - 2y(t) - 4z(t) \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}}_{A =} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}_{v(t)}$$

Uwaga $\dot{u} = au \Rightarrow u = e^{at} \cdot u_0$, $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$

$\boxed{v(t) = e^{At} \cdot v(0)}$, $e^{At} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$

Obliczyć e^{At}: rozważmy funkcję $f: \lambda \longmapsto e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

chcemy obliczyć $f(A)$ gdzie f jest funkcją analityczną (zadaną szeregiem).

Stwierdzenie Niech f będzie funkcją analityczną oraz $w \in \mathbb{C}_n[\cdot]$. Wtedy istnieje funkcja analityczna q oraz $r \in \mathbb{C}_{n-1}[\cdot]$. $f = wq + r$.