$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\quad e^{tA} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$e^{tA} = aA^2 + bA + c\mathbb{1} \qquad \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + (2t-1)e^{-t} \\ 2(e^t - e^{-t}) \\ e^t + (3-2t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{4}\left((e^t + (2t-1)e^{-t}) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2(e^t - e^{-t}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} + e^t + (3-2t)e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \cdot A^n}{n!}$$

$w_A(\lambda) = (1-\lambda)^1(1+\lambda)^2.$

$$V_1 = \ker(A - 1\mathbb{1})^1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

← wektor własny o w. wł $= 1$

$$V_{-1} = \ker(A + 1\mathbb{1})^2 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

← w. własny macierzy A w. własnej -1

$$(A + 1\mathbb{1}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy bazę $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ – Postać jordanowska macierzy A.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A+1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ $\quad n_i$ – krotność λ_i.

$$V = \bigoplus V_{\lambda_i} \qquad V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}.$$

$A = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i$ gdzie $A_i \in \mathrm{End}(V_{\lambda_i})$ t. że $A_i = A|_{V_{\lambda_i}}$.

Zauważmy że $A_i = \underbrace{(A_i - \lambda_i \mathbb{1}_{V_{\lambda_i}})} + \lambda_i \mathbb{1}_{V_i}$ gdzie $(A_i - \lambda_i \mathbb{1}_{V_{\lambda_i}})^{n_i} = 0.$

Definicja Jeśli $N \in \mathrm{End}(W)$ jest taki, że $N^q = 0$ (dla pewnego q) to mówimy, że N jest nilpotentny. Najmniejsze takie q nazywamy stopień nilpotentności N.

Przykład $W = \mathbb{R}_n[\cdot]$, $N = \frac{d}{dx}$ – nilpotent st. $n+1$.

$$\mathcal{E} = \{n!, n(n-1) \cdots 2x, \dots, n(n-1)x^{n-2}, nx^{n}, x^n\} \quad [N]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja Klatką jordanowską nazywamy macierz postaci $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$

Twierdzenie Niech $A \in \mathrm{End}(W)$ gdzie W jest nad $\mathbb{C}$, $\dim W < \infty$. Wówczas istnieje baza przestrzeni W w której macierz operatora A jest blokowa a jej bloki są klatkami jordanowskimi z wartościami własnymi na diagonali.

Dowód Skoro $A = \bigoplus A_i$ $\quad A_i = \lambda_i \mathbb{1}_{V_i} + N_i$

$N_i = (A_i - \lambda_i \mathbb{1}_{V_i})$ - jest nilpotentny st. n_i

to wystarczy twierdzenie udowodnić dla op. nilpotentnych. Niech $N: W \to W$ - nilp. stopnia q: $N^q = 0$.

$\forall i \in \{0, \dots, q\}$ niech $W_i = \ker N^i$. Zauważmy, że

$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \quad W_{q-1} \subset W_q = W$.

Ustalmy $w \in W$. Mówimy w ma wysokość i jeśli $N^i x = 0$ oraz $N^{i-1} x \neq 0$.

Zauważmy, że jeśli x ma wys. równą i, to układ wekt. $\{x, Nx, \dots, N^{i-1}x\}$ jest liniowo niezależny

Rzeczywiście: $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \;|\; N^{i-1}$ działamy $\Rightarrow \alpha_0$.

$\alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{i-1} N^{i-1} x = 0 \;|\; N^{i-2}$ działamy $\Rightarrow \alpha_1 = 0$ i.t.d.

Rozważmy podprzestrzeń $\ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} \subset W$.

i zauważmy, że $\dim(\ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}) \overset{?}{=} \dim W_j - \dim W_{j-1}$.
$\ker N^j$

W tym celu zdefiniujmy $F: W_j \to \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ wzorem $Fx = N^{j-1}x$. Skoro $\operatorname{Im} F = \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}$ oraz $\ker F = W_{j-1}$.

to $\dim W_j = \dim \operatorname{im} F + \dim \ker F = \dim(\ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1}) + \dim W_{j-1}$

- oczywiście.

$y \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{j-1} \Rightarrow \exists x \in \operatorname{Im} N^{j-1}: \; y = N^{j-1}x$ oraz $Ny = 0$.

w takim razie $N^j x = 0 \Rightarrow x \in W_j$ oraz $y = N^{j-1}x = Fx$.

Zauważmy, że

(*) $\underline{\ker N \cap \operatorname{im} N^{q-1}} \subset \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-2} \subset \dots \subset \ker N$.

$y = N^k x = N^{k-1}(Fx)$

Niech $\{f_1, \dots, f_m\}$ $m = \dim \ker N$ będzie bazą $\ker N$ zgodną z wzrastającym ciągiem podprzestrzeni (*).

Wektor $f_1 \in \ker N \cap \operatorname{Im} N^{q-1}$ jest końcówką serii wektorów długości q.

Oznaczmy $f_i = e_{i,1}$ i niech $h(i)$ oznacza wysokość odpowiedniej serii w następującym sensie:

Rys:

$$
\begin{array}{cccccccc}
e_{1,h(1)} & e_{2,h(2)} & & & & & & \\
\downarrow N & \vdots & e_{3,h(3)} & & & & & \\
e_{1,h(1)-1} & & \vdots & & e_{k,h(k)} & & & \\
\vdots\, N & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & & \\
e_{1,1} & e_{2,1} & e_{3,1} & \cdots & e_{k,1} & \cdots & e_{m,1} &
\end{array}
$$

Okazuje się, że $\{e_{ij} : i \in 1, \dots, m \;\; j \in \{1, \dots, h(i)\}\}$ jest bazą W.