V - wektorowa nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. $(\mathbb{F})$

Iloczyn skalarny $\langle v_1 | v_2 \rangle \in \mathbb{F}$.

$v_1 \perp v_2$ jeśli $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$

Przykład $\mathbb{C}^n$ $\langle u | w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}\, w_i$ ← sprzężenie zespolone

Mówimy, że baza $\mathcal{E} = \{v_1, \dots, v_n\}$ jest

- ortogonalna gdy $\langle v_i | v_j \rangle = 0$ $i \neq j$
- ortonormalna gdy $\langle v_i | v_i \rangle = 1$.

Notacja $\|v\| = \langle v | v \rangle^{\frac{1}{2}}$ — długość wektora v.

Lemat Jeśli $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną oraz $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ to $\alpha_i = \langle v_i | v \rangle$. Dowód $\langle v_i | v \rangle = \langle v_i | \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \rangle = \sum_j \alpha_j \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_i$.

Uwaga. Układ wektorów ortonormalnych jest liniowo niezależny.

$f_1, \dots, f_k$ - układ ortonormalny: $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j = 0$ to $\alpha_i = \langle f_i | \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j \rangle = 0$.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta:

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą V.

Definiujemy indukcyjnie układ (niezerowych) wektorów:

$f_1 = e_1$; $f_1, \dots, f_k$ - mamy to $f_{k+1} := e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle f_j | e_{k+1} \rangle f_j}{\|f_j\|^2}$.

Uwaga: ① $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ - dowód indukcyjny

Dla $k=1$ - oczywiste $k \Rightarrow k+1$. $\langle f_1, \dots, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_k, f_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle$

W szczególności $\forall k = 1, \dots, n$ $f_k \neq 0$.

② $f_i \perp f_j$ dla $i \neq j$.

Dowód indukcyjny. Przypuśćmy, że $i < j$.

$$\langle f_i | f_j \rangle = \langle f_i | e_j - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle f_l}{\|f_l\|^2} \rangle = \langle f_i | e_j \rangle - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\langle f_l | e_j \rangle}{\|f_l\|^2} \overbrace{\langle f_i | f_l \rangle}^{\delta_{il}} =$$

$$= \langle f_i | e_j \rangle - \frac{\langle f_i | e_j \rangle}{\cancel{\|f_i\|^2}} \cdot \cancel{\langle f_i | f_i \rangle} = 0.$$

Kładąc $h_i = \frac{f_i}{\|f_i\|}$ dostaję bazę ortonormalną $\{h_1, \dots, h_n\}$.

Przykład $V = \mathbb{R}_1[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$. $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x$

$\mathcal{E} = \{1, x\}$ $\langle v_1 | v_2 \rangle = \int_0^1 v_1(x) v_2(x)\, dx$. $v_2 = \beta_1 + \beta_2 x$.

$\langle 1 | x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}$.

$f_1 = 1$. $f_2 = x - \frac{\langle 1 | x \rangle \cdot 1}{\|1\|^2} = x - \frac{1}{2}$ $f_1 \perp f_2$

$h_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 = f_1$ $h_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$.

Rzut ortogonalny:

Ustalmy podprzestrzeń E przy V. Niech $E^{\perp} = \{v \in V : \forall_{e \in E}\, v \perp e\}$

$E^{\perp} \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową,

$E + E^\perp = V$. $\{e_1, \dots, e_k\}$ — baza E

$E \cap E^\perp = \{0\}$: $\langle v|v\rangle = 0$, $\|v\|^2$

$$v = \underbrace{\sum_1^k \langle e_i|v\rangle e_i}_{\in E} + \Big(\underbrace{v - \sum^k \langle e_i|v\rangle e_i}_{\in E^\perp}\Big)$$

Zauważmy $\langle e_l | v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle \cdot e_i\rangle = \langle e_l|v\rangle - \langle e_l|v\rangle = 0$.

W takim razie $v - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle e_i \in E^\perp$

Wniosek $V = E \oplus E^\perp$. Rzut na E wzdłuż $E^\perp$ nazywamy rzutem ortogonalnym na E i oznaczamy P_E: $P_E v = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i|v\rangle \cdot e_i$.

$E^\perp$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przy E.

Stwierdzenie (Nierówność Cauchy-Schwartz). (CS)

$$|\langle v_1|v_2\rangle| \le \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Dowód: Niech $\alpha \in [0, 2\pi]$: $\langle v_1|v_2\rangle = e^{i\alpha} \cdot |\langle v_1|v_2\rangle|$.

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$: $f(t) = \langle te^{+i\alpha} v_1 - v_2 | te^{+i\alpha} v_1 - v_2\rangle$

$$= \langle te^{+i\alpha} v_1 | te^{+i\alpha} v_1\rangle - \langle te^{+i\alpha} v_1|v_2\rangle - \langle v_2|te^{i\alpha} v_1\rangle + \langle v_2|v_2\rangle$$

$$= t^2 \langle v_1|v_1\rangle - t\underbrace{e^{-i\alpha}\langle v_1|v_2\rangle}_{|\langle v_1|v_2\rangle|} - t\underbrace{e^{i\alpha}\langle v_2|v_1\rangle}_{|\langle v_1|v_2\rangle|} + \langle v_2|v_2\rangle \quad + \langle v_1|v_1\rangle =$$

$$t^2 \langle v_1|v_1\rangle - 2t|\langle v_1|v_2\rangle| + \langle v_2|v_2\rangle \ge 0$$

$$\Delta = 4|\langle v_1|v_2\rangle|^2 - 4\langle v_1|v_1\rangle\langle v_2|v_2\rangle \le 0,$$

$$|\langle v_1|v_2\rangle| \le \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2$$

Wniosek (nierówność trójkąta).

$\forall v_1, v_2 \in V$. $\|v_1 + v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$

Dowód $\|v_1+v_2\|^2 = \langle v_1+v_2|v_1+v_2\rangle = \langle v_1|v_1\rangle + \langle v_2|v_1\rangle + \langle v_1|v_2\rangle + \langle v_2|v_2\rangle$

$$= \|v_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v_1|v_2\rangle + \|v_2\|^2 \le \|v_1\|^2 + 2|\langle v_1|v_2\rangle| + \|v_2\|^2$$

$$\underset{CS}{\le} \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

Przy sprzężeniu do przestrzeni V z il. skalarnym.

① Niech $u \in V$. Wówczas $V \ni v \longmapsto \langle u|v\rangle \in \mathbb{F}$. jest el. V^* który oznaczamy ϕ_u. $\langle \phi_u, v\rangle := \langle u|v\rangle$. Przykład:

$V = \mathbb{R}_3[\cdot]$ $\quad \phi_u(w) = \int_0^1 u(t) \cdot w(t)\,dt$

Na odwrót.

Twierdzenie: $\forall \phi \in V^*$ istnieje! $u \in V$ t. że $\phi = \phi_u$.

Dowód. $\phi \equiv 0$ to $u = 0$. $\Rightarrow \phi = \phi_u = 0$.

$\phi \neq 0$ to $\ker \phi =: E \subsetneq V$. Wiemy, że $V = E \oplus E^\perp$

Niech $\tilde{u} \in E^\perp \setminus \{0\}$: $\langle \phi, \tilde{u}\rangle = 1$.

Obliczmy $\langle \tilde{u}|v\rangle = \langle \tilde{u}|\underbrace{v - \langle\phi, v\rangle \cdot \tilde{u}}_{\in E} + \langle \phi, v\rangle\,\tilde{u}\rangle = \langle \tilde{u}|\langle\phi, v\rangle \cdot \tilde{u}\rangle =$

$\phi(-\|-\|-) = 0$

$= \langle \phi, v\rangle \|\tilde{u}\|^2$. Podsumowując $\langle \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2} | v\rangle = \langle \phi, v\rangle \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_{\frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2}}}$.

$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2}$.

co daje istnienie. Jedyność: Jeśli $\phi_{u_1} = \phi_{u_2} \Rightarrow \phi_{u_1 - u_2} = 0 \Rightarrow$

$0 = \phi_{u_1-u_2}(u_1 - u_2) = \langle u_1 - u_2 | u_1 - u_2\rangle = \|u_1 - u_2\|^2 \Rightarrow u_1 = u_2$. ∎