V – p-ń z iloczynem skalarnym nad $\mathbb{F}$ $\rightsquigarrow \mathbb{R}$ – p-ń euklidesowe, $\rightsquigarrow \mathbb{C}$ – p-ń unitarne.

– ortogonalizacja G-S.

uwaga $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – baza o.n. $A \in L(V)$ $[a_{ij}] = [A]_{\mathcal{E}}$

$$a^i_j = \langle e_i | A e_j \rangle \leftarrow (i,j)\text{-element macierzowy operatora } A.$$

$$A e_j = \sum_l a^l_j e_l$$

$$\langle e_i | A e_j \rangle = \sum_l \underbrace{\langle e_i | e_l \rangle}_{=\delta_{il}} a^l_j = a^i_j$$

– funkcjonały liniowe $\underset{1-1}{\longleftrightarrow}$ wektory $\varphi_v(w) = \langle v | w \rangle$

Stw (Tożsamość polaryzacyjna) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $V_k = \|v + i^k w\|^2$.

$$\forall\ v, w \in V \qquad \langle w | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle$$

Dowód.

$k=0$ $\langle v+w | v+w \rangle = \cancel{\langle v|v \rangle} + \cancel{\langle w|w \rangle} + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle$.

$k=1$ $i\langle v+iw | v+iw \rangle = i(\cancel{\langle v|v \rangle} + \cancel{\langle w|w \rangle} + i\langle v|w \rangle - i\langle w|v \rangle)$

$k=2$ $-\langle v-w | v-w \rangle = -\cancel{\langle v|v \rangle} - \cancel{\langle w|w \rangle} + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle$.

$k=3$ $-i\langle v-iw | v-iw \rangle = -i(\cancel{\langle v|v \rangle} + \cancel{\langle w|w \rangle} - i\langle v|w \rangle + i\langle w|v \rangle)$

$$\sum_{k=0}^{3} i^k \langle v + i^k w | v + i^k w \rangle = 4\langle w | v \rangle. \ \blacksquare$$

Uwaga: W ten sam sposób pokażemy, że $\forall A \in L(V)$

$$\langle w | A v \rangle = \frac{1}{4} \sum i^k \langle v + i^k w | A(v + i^k w) \rangle. \quad (*)$$

Wniosek: Jeśli $A \in L(V)$ spełnia $\langle x | A x \rangle = 0$ dla wszystkich $x \in V$, to $A \equiv 0$.

Rzeczywiście z $(*) \Rightarrow \langle w | A v \rangle = 0$, kładziemy $w = Av$.
i $\langle Av | Av \rangle = \|Av\|^2 = 0 \Rightarrow Av = 0$. $\forall v \in V$.

Sprzężenie hermitowskie operatora: V, W – p-nie z il. sk nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Niech $A \in L(V, W)$.

Ustalmy wektor $w \in W$ i rozważmy funkcjonał liniowy $V \ni v \longmapsto \langle w | A v \rangle \in \mathbb{F}$ (na p-ni V). Istnieje $\tilde{w} \in V$ t. że $\langle w | A v \rangle = \langle \tilde{w} | v \rangle = \langle A^* w | v \rangle$.

Rozważmy, $w_1, w_2 \in W$ $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ to.

$$\langle \widetilde{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2} | v \rangle = \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | A v \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle w_1 | A v \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle w_2 | A v \rangle$$

$$= \bar{\lambda}_1 \langle \tilde{w}_1 | v \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \tilde{w}_2 | v \rangle = \langle \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 | v \rangle. \ \forall v \in V.$$

$\widetilde{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2} = \lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2$. Zatem odwzorowanie $W \ni w \longmapsto \tilde{w} \in V$, jest liniowe. Oznaczenie $\tilde{w} = A^* w$.

A^* nazywamy sprzężeniem hermitowskim A.

Wyrażenie w bazie bazie ortonormalnej $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – baza V, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza W, $[a_{ij}] = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ $b_{ji} \in [A^*]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$. $[b_{ji}] = \overline{[a_{ij}]}^T$

$$b_{ji} = \langle e_j | A^* f_i \rangle = \langle A e_j | f_i \rangle = \overline{\langle f_i | A e_j \rangle} = \overline{a_{ij}} \leftarrow \text{transpozycja + sprzężenie.}$$

Notacja Diraca.

$\langle v|w\rangle \rightsquigarrow \langle v|$, $|w\rangle$, $|v\rangle\langle w|$.

bracket — bra — ket — ket bra

$\langle v|$ – z definicji oznacza funkcjonał liniowy

$V \ni |w\rangle \xmapsto{\langle v|} \langle v|w\rangle \in \mathbb{C}$.

$|v\rangle\langle w| : V \longrightarrow V$ – liniowe odwzorowanie t. że

$|v\rangle\langle w|(u) = \underset{V}{\underset{\cap}{|v\rangle}}\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{\langle w|u\rangle}}$ $\qquad u \xmapsto[\text{notacja}]{\text{stare}} \langle w|u\rangle \cdot v$.

$(|v\rangle\langle w|)^* = |w\rangle\langle v|$. $\qquad A = |v\rangle\langle w|$. $\qquad B = |w\rangle\langle v|$.

$\overbrace{\langle u_1|v\rangle\langle w|u_2\rangle}^{\langle u_1|Au_2\rangle} = \langle \overline{\langle u_1|v\rangle}\cdot w|u_2\rangle =$ – dla wszystkich u_1, u_2.

$= \langle \langle v|u_1\rangle w|u_2\rangle = \langle |w\rangle\langle v| u_1\rangle | u_2\rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \langle Bu_1 | u_2\rangle$

Zatem $\boxed{A^* = B}$ $\boxed{|v\rangle\langle w|^* = |w\rangle\langle v|}$

Dalsze reguły $|v\rangle^* = \langle v|$, $\langle v|^* = |v\rangle$.

Uwaga: Rozkład jedności: $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – baza o.n. to $\mathbb{1}_V = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$

$\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle = \left\{ \begin{array}{l} v = \sum \lambda_i e_i \\ \lambda_i = \langle e_i|v\rangle \end{array} \right. = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle \} = v$.

Własności hermitowskiego sprzężenia $\langle A^*w|v\rangle = \langle w|Av\rangle$

① $A^{**} = A$. $\qquad \langle v|A^{**}w\rangle = \overline{\langle A^*w|v\rangle} = \overline{\langle w|Av\rangle} = \langle Av|w\rangle$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\|}{A^{**}}$

② $(\lambda A + \mu B)^* = \bar\lambda A^* + \bar\mu B^*$. – ćwiczenie.

③ $(DC)^* = C^* D^*$ $\qquad C: V \to W \qquad D: W \to U$.

$\langle u|DCv\rangle = \langle D^*u|Cv\rangle = \langle C^*D^*u|v\rangle$.

Definicja Niech $A \in L(V)$. Mówimy ① że A jest samosprzężony jeśli $A^* = A$, ② że A jest unitarny jeśli $A^* = A^{-1}$ ③ że A jest normalny jeśli $A^*A = AA^*$.

Uwaga ①⇒③ $\qquad$ ②⇒③. $\qquad$ Uwaga $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ unitarny, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ortogonalny
$A^*A = A^2 = AA^* \qquad A^*A = \mathbb{1} = AA^*$.

Przykłady $\mathbb{C}^2$ z il. kanonicznym $\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right\rangle =$

$= \bar v_1 w_1 + \bar v_2 w_2$. $\qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{bmatrix} = A^*$.

gdzie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $\qquad \underset{\uparrow \text{samosprzężoność}}{A^* = A} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} x & u \\ \bar u & y \end{bmatrix}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$ $u \in \mathbb{C}$,

Unitarność: $A^{-1} = \frac{1}{\cancel{ad-bc}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{bmatrix} = A^*$ | W szczególności gdy $\det A = 1$

to unitarność $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{bmatrix}$ $\quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad a, b \in \mathbb{C}$