Znaleźć bazy podprzestrzeni pierwiastkowych operatora $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

V, W - p-nie nad $\mathbb{C}$

$\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ - il. sk. na V

$\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ — — " — " — W

$A \in L(V, W) \rightsquigarrow A^* \in L(W, V)$

$\langle w | Av \rangle_W = \langle A^* w | v \rangle_V$

Dalej $V = W$ & $A \in L(V)$.

A - normalny jeśli $A^* A = A A^*$

np. i) $A^* = A$ samosprzężoność

ii) $A^* = A^{-1}$ unitarność

Jeśli $\mathcal{E}$ - baza o.n. V $[a_{ij}] = [A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ $[b_{ij}] = [A^*]_{\mathcal{E}}$

$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

$v = x + x^{\perp}$ $x \in X$ $x^{\perp} \in X^{\perp}$ $Pv = x$.

$X \triangleleft V \rightsquigarrow V = X \oplus X^{\perp}$

podprzestrzeń wektorowa

$P_X : V \to V$ - rzut na X wzdłuż $X^{\perp}$ = rzut ortogonalny na X

$\{e_1, \ldots, e_k\}$ - baza o.n. X $P = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|$

Stwierdzenie Niech $V = X \oplus Y$. Wówczas rzut $P : V \to V$ na X wzdłuż Y jest ortogonalny $\Leftrightarrow P^* = P$.

Dowód ($\Rightarrow$) $Y = X^{\perp}$ $v = v_1 + v_2$, $u = u_1 + u_2$ $v_1, u_1 \in X$ $v_2, u_2 \in Y$,

$\langle u | Pv \rangle = \langle u_1 + u_2 | v_1 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle$

$\langle Pu | v \rangle = \langle u_1 | v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle$

$\Downarrow$ $\boxed{P = P^*}$

($\Leftarrow$) $P = P^*$. Czy $\forall_{y \in Y \rightsquigarrow Py = 0,\; x \in X \rightsquigarrow Px = x}$ $\langle y | x \rangle = 0$?

$\langle y | x \rangle = \langle y | Px \rangle = \langle Py | x \rangle = 0$.

Stw Niech $A \in L(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) A jest normalny (2) $\forall_{v \in V}$ $\|Av\| = \|A^* v\|$.

W szczególności jeśli A jest normalny to $\ker(A - \lambda \mathbb{1}) = \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{1})$. Ponadto jeśli $\lambda \neq \mu$ to $\ker(A - \lambda \mathbb{1}) \perp \ker(A - \mu \mathbb{1})$.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall_{v \in V}$ $\langle v | A^* A v \rangle = \langle v | A A^* v \rangle$

$\|Av\|^2 = \|A^* v\|^2$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (1) $\|Av\| = \|A^* v\| \Rightarrow \langle v | (A^* A - A A^*) v \rangle = 0 \; \forall_{v \in V}$

z tożsamości polaryzacyjnej $A^* A - A A^* = 0$.

W szczególności $v \in \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \Leftrightarrow \|(A - \lambda \mathbb{1}) v\| = 0 \Leftrightarrow$

$A - \lambda \mathbb{1}$ - normalny gdy A normalny $\Leftrightarrow 0 = \|(A - \lambda \mathbb{1})^* v\| = \|(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{1}) v\| = 0 \Leftrightarrow$

$v \in \ker(A^* - \bar{\lambda} \mathbb{1})$

$v \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})$ $u \in \ker(A - \mu \mathbb{1})$.

$\lambda \langle u | v \rangle = \langle u | Av \rangle = \langle A^* u | v \rangle = \langle \bar{\mu} u | v \rangle = \mu \langle u | v \rangle$

czyli $\langle u | v \rangle = 0$ ∎

Twierdzenie spektralne:

Niech $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną, oraz $A \in L(V)$ będzie operatorem normalnym. Wówczas A posiada diagonalizującą ortonormalną bazę złożoną z wektorów wł. A.

Dowód (indukcja ze względu na wymiar p-ni V).

1 krok indukcji $\dim V = 1$ – oczywiste.

$n \Rightarrow n+1$. Załóżmy, że tw. jest prawdziwe dla $\dim W = n$ i dla wszystkich op. normalnych na W.

$A \in L(V)$, $\dim V = n+1$, A normalny.

Skoro V jest nad $\mathbb{C}$ to w_A ma pierwiastek $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Niech $e_0 \in V$ będzie wektorem wł. A o w. wł. λ_0 t. że $\|e_0\| = 1$. Niech $X = \langle e_0 \rangle^{\perp}$. $\operatorname{Dim} X = n$.

Uwaga: $\forall x \in X \quad Ax \in X \;\&\; A^* x \in X$. $\rightsquigarrow$

$$\langle e_0 | Ax \rangle = \langle A^* e_0 | x \rangle = \langle \bar{\lambda}_0 e_0 | x \rangle = \lambda_0 \langle e_0 | x \rangle = 0$$

$$\rightsquigarrow \langle e_0 | A^* x \rangle = \langle A e_0 | x \rangle = \bar{\lambda}_0 \langle e_0 | x \rangle = 0.$$

Niech $\tilde{A} = A|_X \in L(X)$. Jeśli $\tilde{A}$ jest operatorem normalnym (na X, $\dim X = n$) to bierzemy $\tilde{\mathcal{E}}$ bazę X o.n. w. własnych $\tilde{A}$ kończąc dowód kładąc $\mathcal{E} = \{e_0, \tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ gdzie $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n\}$.

Normalność $\tilde{A}$. udowodnimy, że $\tilde{A}^* = A^*|_X$.

$$\forall x_1, x_2 \in X: \quad \langle x_1 | \tilde{A} x_2 \rangle = \langle x_1 | A x_2 \rangle = \langle A^* x_1 | x_2 \rangle$$

$$= \langle A^*|_X x_1 | x_2 \rangle \Rightarrow \tilde{A}^* = A^*|_X.$$

i w końcu $\tilde{A}^* \tilde{A} = A^*|_X A|_X = A^* A|_X = A A^*|_X = A|_X A^*|_X$

$$= \tilde{A} \tilde{A}^* \quad \blacksquare$$

Z innej beczki:

Ustalmy $u \in V$ i $X \subset V$ ← podprzestrzeń wektorowa

Zdefiniujmy $\inf\limits_{x \in X} \|u - x\| =: \operatorname{dist}(u, X)$

Stw. $P: V \to V$ będzie rzutem ortogonalnym na X. Wówczas $\operatorname{dist}(u, X) = \|u - Pu\|$.

<u>Dowód</u> $\operatorname{dist}(u, X) \leq \|u - Pu\|$ gdyż $Pu \in X$,

Z drugiej strony $\forall_{x \in X} \; \|u - x\|^2 = \|\underbrace{u - Pu}_{\in X^{\perp}} + \underbrace{Pu - x}_{\in X}\|^2$

$$= \|u - Pu\|^2 + \|Pu - x\|^2 \geq \|u - Pu\|^2 \quad \blacksquare$$

Odległość p-ni afinicznych

$$X_1 \subset \underset{\substack{\psi \quad \psi \\ v_1 \quad v_2}}{V} \supset X_2$$

$$\operatorname{dist}(v_1+X_1,\ v_2+X_2) := \inf_{\substack{x_1\in X_1\\ x_2\in X_2}} \|v_1+x_1-(v_2+x_2)\|.$$

odległość podprzestrzeni afinicznych v_1+X_1 od v_2+X_2.

$$= \inf_{\substack{x_1\in X_1\\ x_2\in X_2}} \|v_1-v_2-(x_2+x_1)\| = \inf_{y\in X_1+X_2} \|v_1-v_2-y\|$$

$$= \|v_1-v_2-P_{X_1+X_2}(v_1-v_2)\|$$

gdzie $P_{X_1+X_2}$ – rzut ortogonalny na X_1+X_2.