① Macierz Grama układu wektorów

② Powierzchnie kwadratowe.

---

① V – nad $\mathbb{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – iloczyn skalarny

$v_1, \ldots, v_k$ – wektory liniowo niezależne.

$$x = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i \; ; \quad \langle x | x \rangle = \sum_{i,j} x^i \langle v_i | v_j \rangle x^j .$$

Macierz Grama układu wektorów $v_1, \ldots, v_k$ nazywamy macierz $[\langle v_i | v_j \rangle] \overset{\text{ozn}}{=} G(v_1, \ldots, v_k)$.

Ustalmy wektor $v \in V$. $\operatorname{dist}(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle) \overset{\text{stw}}{=} \|(1-P)v\|$

gdzie P – rzut ortogonalny na $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Niech $Pv = \sum_{i=1}^{k} x^i v_i$. Zauważmy, że

$$\langle v_i | v \rangle = \langle v_i | Pv \rangle + \underbrace{\cancel{\langle v_i | (1-P)v \rangle}}_{0} = \langle v_i | Pv \rangle =$$

$$= \sum_j x^j \langle v_i | v_j \rangle \qquad (*) \quad i = 1, \ldots, k$$

Oznaczmy $\delta = \operatorname{dist}(v, \langle v_1, \ldots, v_k \rangle)$

$$\delta^2 = \langle (1-P)v | (1-P)v \rangle = \langle v | (1-P)v \rangle - \underbrace{\cancel{\langle Pv | (1-P)v \rangle}}_{=0}$$

$$= \langle v | v \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v | v_j \rangle x^j \qquad (**)$$

Macierzowy zapis $(*)$, $(**)$:

$$\begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle, & \langle v_1 | v_2 \rangle, & \ldots, & \langle v_1 | v_k \rangle, & \langle v_1 | v \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle, & \ldots & , & \langle v_2 | v_k \rangle, & \langle v_2 | v \rangle \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle v_k | v_1 \rangle & \ldots & & \langle v_k | v_k \rangle, & \langle v_k | v \rangle \\ \langle v | v_1 \rangle, & \ldots & , & \langle v | v_k \rangle, & \langle v | v \rangle - \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zatem wyznacznik powyższej macierzy jest równy 0.

Z liniowości wyznacznika względem ostatniej kolumny:

$$0 = \det G(v_1, \ldots, v_k, v) - \delta^2 \det(G(v_1, \ldots, v_k))$$

Zatem $\delta = \left(\dfrac{\det G(v_1, \ldots, v_k, v)}{\det G(v_1, \ldots, v_k)} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Definicja: Niech $(v_1, \ldots, v_k) \in V$ jw. Objętość równoległościanu rozpiętego przez $(v_1, \ldots, v_k)$ definiujemy indukcyjnie: $\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_{k-1}) \cdot d(v_k, \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle)$

$\operatorname{vol}(v_1) := \|v_1\|$.

Stwierdzenie

Zachodzi równość: $\mathrm{vol}(v_1,\dots,v_k) = \det(G(v_1,\dots,v_k))^{\frac{1}{2}}$

Dowód. Indukcja

Początek indukcji

Jeden wektor $\mathrm{vol}(v_1) = \|v_1\| \overset{?}{=} \det(G(v_1))^{\frac{1}{2}}$

$\cancel{\det}\ \underbrace{\langle v_1 | v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}}_{\text{długość wekt. } v_1}$

Krok indukcyjny: $k \Rightarrow k+1$

$$\mathrm{vol}(v_1,\dots,v_k,v_{k+1}) = \mathrm{vol}(v_1,\dots,v_k)\cdot \mathrm{dist}(v_{k+1}, \langle v_1,\dots,v_k\rangle)$$

$$= \det(G(v_1,\dots,v_k))^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{dist}(\dots) \overset{(***)}{=} \det G(v_1,\dots,v_{k+1})^{\frac{1}{2}} \ \blacksquare$$

Ad 2 Klasyfikacja pow. kwadratowych

Przykład

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3 = 1\}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$S = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1\}$.

Definicja: $V, \langle\cdot|\cdot\rangle$, $Q: V \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową oraz $c \in \mathbb{R}$.

Powierzchnię S postaci $S = \{x \in V : Q(x) = c\}$ nazywamy powierzchnią kwadratową typu (1) I jeśli $c \neq 0$. (2) II jeśli $c = 0$.

Uwaga: jeśli $c \neq 0$ to bez straty ogólności możemy założyć, że $c = 1$.

Definicja: Mówimy, że dwie powierzchnie kwadratowe S_1, S_2 mają taki sam kształt jeśli istnieje odwzorowanie ortogonalne $T: V \to V$ t. że $S_2 = TS_1$.

Przypomnienie: postać kanoniczna formy kwadratowej.

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\phi_{j+p}^2}{a_{j+p}^2} \qquad (p,q) = \mathrm{sgn}\, Q$$

$(\phi_1,\dots,\phi_{p+q})$ - wsp. ortonormalne na V.

Q_1 i Q_2 mają tę samą postać kanoniczną to istnieje $T: V \to V$ t. że $Q_2 = Q_1 \circ T$. Wówczas

$S_1 = \{x \in V : Q_1(x) = c\}$ $\quad S_2 = \{x \in V : Q_2(x) = c\}$

mają ten sam kształt: $S_2 = \{x \in V : Q_1(Tx) = c\} = \{x \in V : Tx \in S_1\} = T^{-1}S_1 \Rightarrow S_1 = TS_2$

Twierdzenie.

$Q_1, Q_2 \; V \to \mathbb{R}$, $S_i = \{x \in V : Q_i(x) = 1\}$ $i = 1, 2$

Jeśli $S_1 = S_2$ to $Q_1 = Q_2$.

Dowód

Ustalmy $i=1$ oraz rozważmy $\{x \in V : Q_1(x) > 0\} = \mathcal{O}$

Zauważmy $\forall x \in S_1$ oraz $t > 0$ $t \cdot x \in \mathcal{O}$

gdyż $Q_1(tx) = t^2 Q_1(x) = t^2 > 0$.

Na odwrót: $y \in \mathcal{O}$ to $\frac{y}{\sqrt{Q(y)}} \in S_1$ $\Big\}$ $Q\left(\frac{y}{\sqrt{Q(y)}}\right) = \frac{Q(y)}{Q(y)} = 1$

Widzimy zatem, że

$\boxed{① \; \mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} S_1}$

② Wartości Q_1 na $\mathcal{O}$ jest wyznaczone przez wartości na S_1

gdyż $Q_1(tx) = t^2 \quad \forall x \in S_1$.

Skoro $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym a funkcja $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ t. że $f(x) = Q_1(x)$ jest różniczkowalna oraz $f''(x) = Q_1(x) \quad \forall x \in V$ to widzimy znajomość S_1 pozwala odtworzyć Q_1.

Uwaga: można pokazać, że powierzchnie kwadratowe typu II (generycznie) odtwarzają Q z dokładnością do stałej multyplikatywnej.

Terminologia: $\dim V = 3$.

pow. typu I

$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1$ – elipsoida. $(3,0)$

$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1$ – hiperboloida jednopowłokowa $(2,1)$

$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} - \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 1$ – hiperboloida dwupowłokowa $(1,2)$

pow. typu II

$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} + \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0$ punkt. $(3,0)$

$\frac{\phi_1^2}{a_1^2} + \frac{\phi_2^2}{a_2^2} - \frac{\phi_3^2}{a_3^2} = 0$ stożek eliptyczny $(2,1)$