Przestrzenie wektorowe

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[\,]$, $\mathbb{R}[\,]$.
$\dim = n$, $\dim = n+1$, $\dim = +\infty$.

„Dziwny" przykład. wektory $= \mathbb{R}$, skalary $= \mathbb{Q}$

dodawanie liczb rzeczywistych, mnożenie przez skalary $\lambda \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot v \in \mathbb{R}$.

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = +\infty$.

Baza przestrzeni wektorowej: V nad ciałem $\mathbb{F}$.
$\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą jeśli jest układem liniowo niezależnym oraz $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$

<u>Stwierdzenie</u> Układ $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ jest bazą V $\Leftrightarrow$ dla każdego $v \in V$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ t. że $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ oraz $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ są jednoznacznie wyznaczone przez $v \in V$.

<u>Dowód</u>
(⇒) jeśli $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą, to skoro $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ to $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$: $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Przypuśćmy, że $v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n v_n$ dla $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \in \mathbb{F}$. Wówczas $(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n) v_n = 0$. Z liniowej niezależności $\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 = 0, \dots, \lambda_n - \tilde{\lambda}_n = 0$.
(⇐) Skoro $\forall v \in V$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ j.w. to $V = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$. Czy $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest liniowo niezależny?

Przypuśćmy, że $0 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ z jednoznaczności $\mu_1 = 0, \dots, \mu_n = 0$.
ale $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 v_n$
i układ $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest liniowo niezależny, więc jest bazą ∎

<u>Uwaga</u> Mając bazę V można V utożsamić z $\mathbb{F}^n$.

$$V \ni v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n, \qquad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \longleftarrow\!\shortmid \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie.
Niech $\dim V = n < \infty$ oraz $\{v_1, \dots, v_k\}$ $k < n$ jest liniowo niezależny.
Wówczas $\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ t. że $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ jest bazą V.

Dowód.
Istnieje wektor $v \notin \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle$. Kładziemy $v_{k+1} = v$.
Układ $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ jest liniowo niezależny:
jeśli $\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots}_{} + \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$. Jeśli $\lambda_{k+1} \neq 0$ to $v_{k+1} = -\frac{1}{\lambda_{k+1}} (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) \in \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle$, sprzeczność. Zatem $\lambda_{k+1} = 0$. A stąd $\lambda_1 = 0 = \dots = \lambda_k$.
Po $n-k$ krokach j.w. dostajemy bazę $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ prz. V

Iloczyn kartezjański prz. wektorowych
V, W - prz. wektorowe nad $\mathbb{F}$. W zbiorze $V \times W$ wprowadzamy
(a) dodawanie: $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ | (b) mnożenie przez skalary $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$.

Uwaga Jeśli $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą V oraz $\{w_1, \dots, w_l\}$ bazą W to $\{(v_1,0), \dots, (v_n,0), (0,w_1), \dots, (0,w_l)\} \subset V\times W$ jest bazą $V \times W$.

$(v,w) = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_l w_l) =$
$= \lambda_1 (v_1, 0) + \dots + \lambda_n (v_n, 0) + \mu_1 (0, w_1) + \dots + \mu_l (0, w_l)$

Widać mamy liniową niezależność i nasz układ generuje $V \times W$.

Wniosek $\dim V \times W = \dim V + \dim W$.

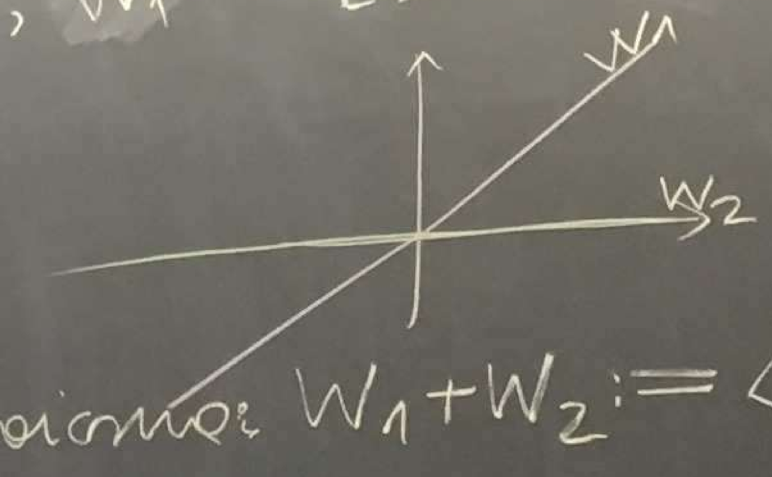
Suma prosta podprzestrzeni wektorowych.

Niech $V \supset W_1, W_2$ będą podprzestrzeniami wektorowymi V.

Wiemy $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią V, ale $W_1 \cup W_2$ jest podprz. $\Leftrightarrow$ $W_1 \subset W_2$ lub $W_2 \subset W_1$

Przykład $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $W_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

np $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \in V \setminus W_1 \cup W_2$



$V \cap W = \{0\}$

Suma algebraiczna: $W_1 + W_2 := \langle W_1 \cup W_2 \rangle = \{ w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$

Stwierdzenie
Następujące warunki są równoważne
① $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
② $\forall w \in W_1 + W_2$ $\exists$ jednoznaczne wyznaczone $w_1 \in W_1$ & $w_2 \in W_2$ t. że $w = w_1 + w_2$.

$\Rightarrow$ Jeśli $w = w_1 + w_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, $w \in W_1 + W_2$, to $\underbrace{w_1 - \tilde{w}_1}_{\in W_1} = \underbrace{\tilde{w}_2 - w_2}_{\in W_2} = 0$, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Leftarrow$ Jeśli $w \in W_1 \cap W_2$ to $\exists\, w_1 \in W_1$ oraz $w_2 \in W_2$ że $w = \underbrace{w}_{\in W_1} + 0 \underbrace{w}_{\in W_2} = 0 \underbrace{w}_{\in W_1} + \underbrace{w}_{\in W_2}$

z jednoznaczności rozkładu $w_1 = 0 w_1 = 0$, $0 w_2 = w_2 = 0$ czyli $w = 0$.

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Definicja Jeśli spełniony jest jeden z warunków powyższego twierdzenia to mówimy, że $W_1 + W_2$ jest sumą prostą W_1 oraz W_2 i piszemy $W_1 \oplus W_2$.

Twierdzenie $W_1, W_2 \subset V$, $\dim V < \infty$.

$\dim(W_1 + W_2) = \dim \underset{k+l}{W_1} + \dim \underset{k+m}{W_2} - \dim(\overset{k}{W_1 \cap W_2})$.

Dowód Jeśli $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ Niech $\{v_1, \dots, v_k\}$ będzie bazą $W_1 \cap W_2$.

Niech dalej $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l\}$ będzie bazą W_1 oraz $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$ będzie bazą W_2.

Wystarczy pokazać, że $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l, u_1, \dots, u_m\}$ jest bazą $W_1 + W_2$

Jest jasne, że $\langle \text{—}\ \text{"}\ \text{—}\ \text{"}\ \text{—} \rangle = W_1 + W_2$.

Przypuśćmy, że $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_l w_l + \rho_1 u_1 + \dots + \rho_m u_m = 0$,

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_l w_l}_{\in\, W_1 \cap W_2} = \hat{\lambda}_1 v_1 + \ldots + \hat{\lambda}_k v_k$$ dla pewnych $\hat{\lambda}_i \in \mathbb{F}$.

Zatem $(\lambda_1 - \hat{\lambda}_1) v_1 + \ldots + (\lambda_k - \hat{\lambda}_k) v_k + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_l w_l = 0$.

i w szczególności $\mu_1 = \ldots = \mu_l = 0$. Podobnie dowodzi się, że $\rho_1 = \ldots = \rho_m = 0$.

i ostatecznie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ i mamy liniową niezależność.

Jeśli $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ to rozumowanie podobne daje teza tw.