Zadania domowe z Algebry I
Seria 3.

1. Zbadać, że podane zbiory W są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowych V, jeżeli:
   a) $W=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
   b) $W=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
   c) $W=\{p \in \mathbb{R}_3[x] : \forall_{x\in\mathbb{R}}, p(x) = p(-x)\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.
   d) $W=\{f \in C([0,2]) : f'(1) = 0\}$, $V = C([0,2])$.
   e) $W=\left\{\begin{bmatrix} x, y \\ x+y, 2x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$ (odp. nie jest).

2. Zbadać liniową niezależność wektorów:
   a) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ z $\mathbb{R}^2$.
   b) $\sin(x), \sin(2x), \sin^2(x), \cos(x), \cos(2x), \cos^2(x)$

3. Niech V - przestrzeń wektorowa a wektory u, v, w, x bedą liniowo niezależne. Zbadać niezależność poniżych układów wektorów:
   a) $u + 2v + w, v - 3w + x, u - x$
   b) $u - x, v - x, w - x, u - v + w - x$.

4. Znaleźć bazę rozpinającą poniższe przestrzenie wektorowe:
   a) $V = \{(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, 2x + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
   b) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}\right\}$.
   c) $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$.

5. Znaleźć współrzędne wektora $p = 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_2[x]$ w bazie $\{2 + x, 3 - x, x^2 + 4\}$.

6. Znaleźć współrzędne podanego wektora we wskazanej bazie:
   a)$v = (-2,5,6) \in \mathbb{R}^3$, $\quad B = \{(1,1,0),(2,1,0),(3,3,1)\}$
   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

7. Wyznaczyć współrzędne wektora w dowolnej bazie rozpinającej podaną podprzestrzeń wektorową:
   a) $v = 4x62 - 24x - 3, \quad V = \{p \in \mathbb{R}_2[x], p'(3) = 0\}$.
   b) $v = (1,1,-2,1), \quad V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = z + 3t\}$

8. Podać przykład bazy, w której podany wektor ma współrzędne:
   a) $v = (3,-5) \in \mathbb{R}^2, \quad v = [5,2]_?$,
   b) $p = x^2 - 2x \in \mathbb{R}_2[x], \quad p = [-1,3,1]_?$,

9. Podać przykład macierzy przejścia z bazy f do bazy g, jeżeli:
   a) $V = \mathbb{R}^2, \quad f = \{(3,1),(2,1)\}, g = \{(1,-1),(2,3)\}$.
   b) $V = \mathbb{R}_3[x], \quad f = \{1, x, x^2.x^3\}, \quad g = \{2x^2 - 3, x^3 + x, 4 - x, 1 + x + x^2\}$

10. Zbadać, czy poniższe przekształcenia są liniowe:
    a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : L(x,y) = (x + 2y, x - y, x)$.
    b) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x) = |x|$.
    c) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], L(p(x)) = xp'(x) + p(1)$.
    d) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : L(x,y) = (2x - y, x + 1, y - 1)$.

11. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}[x]$ przeprowadza wektor $p_1 = 2x + 3$ na wektor $q_1 = 4x^2 - x - 2$ a wektor $p_2 = 4x - 5$ na wektor $q_2 = 2x^7 + x$. Znaleźć obraz wektora $p = x + 7$ w tym przekształceniu.

12. Dane są dwie podprzestrzenie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $V_1 = \{X : \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0\}$ i $V_2 = \{X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.

13. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz bazy tych podprzestrzeni dla:
a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) = (2x - 3y, 3y - 6x)$.
b) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], (Lp)(x) = (x^2 + 2x)p'(-x), x \in \mathbb{R}$

14. Podać przykłady przekształceń liniowych takich, że:
a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \operatorname{Ker} L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \operatorname{Im} L = \{(r, s, t) : 2r = 3s = 6t\}$.
b) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \operatorname{Ker} L =< x - 1, x^2 - 1 >, \operatorname{Im} L =< x^2 >$.

15. Znaleźć macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach:
a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x, y) = (x + y, 2x + y, x - 3y)$,
$e = \{(1, 1), (1, -1)\}, f = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$

16. Macierz przekształcenia liniowego $L : U \to V$ ma w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$ rozpinającej U oraz w $\{f_1, f_2\}$ rozpinającej V postać:
$A_L = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Znaleźć $L(u_1)$ i $L(u_2)$, jeżeli: $u_1 = 6e_2 - e_3$ a $u_2 = e_1 + 2e_2 - 4e_3$.

17. Znaleźć bazy sumy i części wspólnej przestrzeni $U =< a_1, a_2, a_3 >$ i $V =< b_1, b_2, b_3 >$, gdzie:
a) $a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 3)$,
$b_1 = (1, 2, 2),\ b_2 = (2, 3, -1),\ b_3 = (1, 1, -3)$.

18. Znaleźć w bazach kanonicznych macierz odwzorowania T , gdy:
(a) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ oraz $T(1, 1) = (0, 1)$ i $T(-1, 1) = (3, 2)$;

19. Które z kolumn macierzy $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ należą do przestrzeni V opisanej równaniami $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 + x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 - 3x^5 = 0 \end{cases}$?
Czy z tych kolumn można wybrać bazę V?