1. Rozwiązać równanie: $XX^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. Obliczyć wyznaczniki: a) $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, gdzie $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

3. Korzystają z indukcji matematycznej odowodnić, że:

$$W_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

4. Obliczyć wyznacznik: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ (wsk dodajemy pierwszy wiersz do pozostalych..)

5. Znaleźć macierze odwrotne do:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$,

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) $D_n = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -2 & 3 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $D_n = \det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & 1 & -3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(przyjąć $D_1 = -1$, $D_2 = 5$);

(c) $D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 3 & 6 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 6 & 3 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\sqrt{3} & 2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2\sqrt{3} & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$;

(e) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$; (f) $D_n := \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 3 & -1 & \cdot & \cdot \\ 0 & -2 & 3 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

(g) $D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 6 & 6 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n-1) & 2n \end{bmatrix}$; (h) $D_n = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 3 & 9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3n-3 & 2n-2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n & 3n \end{bmatrix}$

(a) Rozwijając względem ostatniej kolumny, mamy $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$, $n \in \mathbb{N}_+$. Rozwiązaniem ogólnym równania rekurencyjnego jest $D_n = c_1 + c_2 2^n$. Ponieważ $D_1 = 2$ i $D_2 = 4$, więc ostatecznie otrzymujemy $D_n = 2^n$. Inaczej, dodając pierwszy wiersz do drugiego wiersza, mamy $D_{n+1} = 2D_n$, skąd $D_n = c_1 2^n$ i ponieważ $D_1 = 2$, więc ostatecznie $D_n = 2^n$.

(b) $D_{n+2} = D_{n+1} + 6D_n$, $n \in \mathbb{N}_+$; $D_n = \frac{1}{5}\left[(-2)^{n+2} + 3^n\right]$.

(c) Niech B_n oznacza wyznacznik macierzy, która powstaje, gdy zastąpimy 1 w lewym górnym rogu macierzy podanej w zadaniu liczbą 6. Mamy $D_{n+2} = B_{n+1} - 9B_n$ oraz $B_{n+2} = 6B_{n+1} - 9B_n$. Ponieważ $B_n = 3^n - 2n3^{n-1}$, więc $D_{n+2} = 4(n-2)3^n$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. $D_1 = 1$, $D_2 = -8$.

(d) $D_{n+2} = 2\sqrt{3}D_{n+1} - 4D_n$; $D_n = 2^{n-2}[\cos\frac{n\pi}{6} + (4-\sqrt{3})\sin\frac{n\pi}{6}]$.

macierz górnotrójkątną o diagonali ... Jej wyznacznik jest iloczynem elementów na diagonali ... $x \in \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$.

282. Obliczyć wyznacznik $D_n(x)$ i rozwiązać równanie $D_n(x) = 0$:

(a) $D_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & x \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (b) $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$;

(c) $D_n(x) := \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2x & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$; (d) $D_n(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \ldots & \ldots & x \\ 1 & x & 0 & x & \ldots & \ldots & x \\ 1 & x & x & 0 & \cdot & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$.

(d) Odejmujemy ostatni wiersz od wszystkich z wyjątkiem pierwszego i otrzymujemy macierz wierszowo równoważną: $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & x & 0 & \cdot & 0 & x \\ 0 & 0 & -x & x & \cdot & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & -x & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \\ 1 & x & x & \cdot & \cdot & x & 0 \end{bmatrix}$. Rozwijając względem pierwszej kolumny, otrzymujemy macierz: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \cdot & 0 & x \\ 0 & -x & x & \cdot & 0 & +x \\ 0 & 0 & -x & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \end{bmatrix}$. Odejmując pierwszą kolumnę od wszystkich pozostałych, otrzymujemy macierz: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -x & 2x & x & \cdot & x & 2x \\ 0 & -x & x & \cdot & 0 & +x \\ 0 & 0 & -x & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x \end{bmatrix}$.