Zadania domowe z algebry z geometrią II.
Seria pożegnalna.

1. Niech $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ jest bazą ortonormalną. Znajdź
   (a) Bazę ortonormalną podprzestrzeni $V =< e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 + 3e_5, e_1 + e_2 + e_3 - e_5 >$
   (b) Dopełnienie ortogonalne V $(V^{\perp})$.
   (c) Bazę ortogonormalną w $V^{\perp}$.

2. W czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa płaszczyzna Π_1 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, natomiast płaszczyzna Π_2 przechodzi przez punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Czy płaszczyzny są równoległe?
   (b) Jaka jest odległość między płaszczyznami?

3. Oblicz objętość (czterowymiarową) czterowymiarowego równoległościanu w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa, którego jeden wierzchołek w pewnych układzie kartezjańskim ma współrzędne $a = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ zaś wierzchołki mające wspólną krawędź z a mają współrzędne $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $e = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Jaka jest objętość (trójwymiarowa) jego „ściany bocznej" zawiarającej wierzchołki abcd?

4. Sprawdzić, że operator $F \in End(\mathbb{C}^3)$ określony jako mnożenie przez macierz F (tzn. $F(x) := Fx$) jest normalny; znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych, rzuty ortogonalne na podprzestrzenie własne oraz rozkład spektralny tego operatora.
   a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}$