Zadania do wykładu algebra z geometrią

seria 2

Zad.1 Zbadaj, czy odwzorowanie $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ określa formę dwuliniową, jeśli:

a) $V := \mathbb{R}_n[x], \quad b(v, w) := \displaystyle\int_0^1 v(x)w(x)\,dx,$

b) $V := \mathbb{R}_n[x], \quad b(v, w) := \displaystyle\int_0^1 v'(x)w(x)\,dx,$

c) $V := \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b(A, B) := \mathrm{Tr}\,(AB).$

Zad.2 Znaleźć macierze formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$$

- w bazie kanonicznej,
- w bazie: $u_1 = (e^t, 0, 0)^T$, $u_2 = (0, e^{-t}, 0)^T$, $u_3 = (0, 0, 1)^T$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
- w bazie: $v_1 = (1, -2t^2, 2t)^T$, $v_2 = (0, 1, 0)^T$, $v_3 = (0, -2t, 1)^T$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
- w bazie: $w_1 = (1, 0, 0)^T$, $w_2 = (-2t^2, 1, 2t)^T$, $w_3 = (-2t, 0, 1)^T$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
- w bazie: $f_1 = (0, 0, -1)^T$, $f_2 = (1/t, 0, 0)^T$, $f_3 = (0, t, 0)^T$, gdzie $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Zad.3 Niech

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$. Oblicz macierz tej formy kwadratowej w bazie $\{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3\}$.

Zad.4 Znaleźć formę kwadratową stowarzyszoną z formą dwuliniową $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_1y_3.$$

Zad.5 Niech $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową taką, że

$$\forall v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} : \ \alpha(v) > 0.$$

Udowodnij, że w dowolnej bazie macierz $M = (M_{ij})$ formy kwadratowej α spełnia warunki: $M_{11}, M_{22} > 0$.

Zad.6 Następujące formy kwadratowe $Q : V \to \mathbb{R}$ sprowadzić do postaci diagonalnej oraz znaleźć bazy diagonalizujące i sygnatury:

a) $Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3, \ \ Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$ dla $V = \mathbb{R}^3$,

b) $Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1, \ \ Q_2(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$ dla $V = \mathbb{R}^4$.

Zad.7 Dla jakich wartości λ następujące formy kwadratowe są dodatnio określone

a) $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

b) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$,

c) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

d) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Zad.8 Wykonać z zainteresowaniem i zrozumieniem zadania 334, 335, 362, 365:a),b), 367 ze zbioru zadań "Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami", J. Jezierski et al.