ALGEBRA, SERIA ZADAŃ Nr 1

WYZNACZNIKI

1. Obliczyć wyznaczniki odwzrorowań liniowych $g : R^2 \longrightarrow R^2$ zadanych w następujący sposób:
   a) $g(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2)$;
   b) $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + x_2)$;
   c) $g(1, 2) = (1, 0), g(0, 1) = (1, 1)$.

2. Dane jest odwzorowanie liniowe $g : R^3 \longrightarrow R^3$, które wektory bazy kanonicznej e_1, e_2 oraz e_3 przekształca w sposób następujący: $g(e_1) = (2, 3, 1)$, $g(e_2) = (1, 2, 1)$, $g(e_3) = (-1, 4, 0)$. Znaleźć wyznacznik tego odwzorowania.

3. Obliczyć wyznaczniki:

$$\textbf{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \textbf{b)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad \textbf{c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\textbf{d)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \textbf{e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \textbf{f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Elementy macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $a_{ij} \in C$, spełniają warunek $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Wykazać, że $detA$ jest liczbą rzeczywistą.

5. Dla jakich wartości parametru $t \in C$ poniższa macierz jest nieosobliwa?

$$\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix}.$$

6. Wyrazić $detB$ poprzez $detA$, jeśli macierz B powstaje z macierzy A (stopnia $n \geqslant 3$) w wyniku następujących przekształceń:
   a) od pierwszego wiersza odejmujemy drugi, od drugiego trzeci, a od trzeciego pierwotny wiersz pierwszy;
   b) pierwszą kolumnę przestawiamy na koniec, a pozostałe kolumny przesuwamy w lewo, zachowując ich kolejność;
   c) pierwsze k wierszy piszemy w odwrotnym porządku i w odwrotnym porządku piszemy ostatnie $n-k$ wierszy;
   d) wszystkie wiersze zapisujemy w odwrotnym porządku;
   e) każdy element zastępujemy elementem symetrycznym względem drugiej przekątnej.

7. Wykazać równości:

$$\mathbf{a})\ det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x);$$

$$\mathbf{b})\ det\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin(\beta-\alpha).$$

8. Rozwiązać zadanie nr 280 ze zbioru zadań „Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami"pod redakcją Jacka Jezierskiego.