ALGEBRA I R Wykład

7.10.2014 r.

CIAŁO

Definicja:
Ciałem nazywamy piątkę elementów $(\mathbb{F}, +, 0, \cdot, 1)$, gdzie:

- $\mathbb{F}$ jest zbiorem
- $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ $\quad +(a,b) \overset{\text{OZN}}{=} a+b$
- $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ $\quad \cdot(a,b) \overset{\text{OZN}}{=} a \cdot b$

oraz spełnione są następujące warunki:

- $\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}} \ (a+b)+c = a+(b+c)$ ŁĄCZNOŚĆ
- $\forall_{a,b \in \mathbb{F}} \ a+b = b+a$ PRZEMIENNOŚĆ
- $\forall_{a \in \mathbb{F}} \ a+0 = a$ ELEMENT NEUTRALNY
- $\forall_{a \in \mathbb{F}} \ \exists_{b \in \mathbb{F}} \ a+b=0$ ELEMENT PRZECIWNY

- $\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}} \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ŁĄCZNOŚĆ
- $\forall_{a,b \in \mathbb{F}} \ a \cdot b = b \cdot a$ PRZEMIENNOŚĆ
- $\forall_{a \in \mathbb{F}} \ a \cdot 1 = a$ ELEMENT NEUTRALNY
- $\forall_{a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}} \ \exists_{b \in \mathbb{F}} \ a \cdot b = 1$ ELEMENT ODWROTNY

$\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}} \ a \cdot (b+c) = ab+ac$ ROZDZIELNOŚĆ DODAWANIA WZGLĘDEM MNOŻENIA

$0 \neq 1$

Dodawanie jest operacją łączną i przemienną
0 jest elementem neutralnym dodawania
→ analogicznie dla operacji mnożenia

Można pokazać, że
$$\begin{cases} \text{I. } 0 \text{ jest dokładnie jedno}, \ \forall_a \exists! b : a+b=0 \quad \boxed{b=-a} \quad * \\ \text{II. } 1 \text{ jest dokładnie jedno}, \ \forall_{a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}} \exists! b : a \cdot b = 1 \quad \boxed{b = a^{-1}} \quad ** \end{cases}$$

Dowód:

I. $0, 0' \in \mathbb{F}$ takie że $(*)$ to:
$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$

II. $1, 1' \in \mathbb{F}$ takie, że $(**)$ to:
$1 = a \cdot b = a \cdot a^{-1} = 1'$

Przykłady:

- $\mathbb{Q}$ - ciało liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ - ciało liczb rzeczywistych
- P - liczba pierwsza
- ciało $\mathbb{Z}_p = (\{0,1,\dots,p-1\}, +_p, 0, \cdot_p, 1)$

  gdzie $a +_p b$ jest resztą z dzielenia $a+b$ przez p
  $a \cdot_p b$ jest resztą z dzielenia $a \cdot b$ przez p

Ciała skończone klasyfikuje się ze względu na liczbę elementów, tzn

- Jeśli $\mathbb{F}$ jest ciałem skończonym, to $\exists p$ - liczba pierwsza oraz $n \in \mathbb{N}$ takie że: $|\mathbb{F}| = p^n$
- Co więcej $\forall p,n$ (j.w.) istnieje jedno z dokładnością do izomorfizmu ciało $\mathbb{F}: |\mathbb{F}| = p^n$. Ciało to oznaczamy symbolem $|\mathbb{F}_{p^n}|$

Ciało $\mathbb{F}_{2^2} = \{0, 1, a, b\}$ (czteroelementowe)

Tablica dodawania:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Tablica mnożenia:

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Charakterystyka ciała $\mathbb{F}$
(nie musi być ono skończone)

Niech $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{F}$ dane wzorem $\varphi(n) = \underbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ razy}}$
łatwo sprawdzić, że $\forall_{k,l \in \mathbb{Z}}\ \varphi(k \cdot l) = \varphi(k) \cdot \varphi(l)$

Są dwie możliwości:

(a) $\exists n > 0 : \varphi(n) = 0$

(b) $\forall n > 0 : \varphi(n) \neq 0$

Charakterystyką ciała $\mathbb{F}$ w przypadku (a) nazywamy najmniejsze $n > 0 : \varphi(n) = 0$; w przypadku (b) mówimy, że charakterystyka $\mathbb{F}$ jest równa 0. Oznaczenie $\mathrm{char}(\mathbb{F})$

Stwierdzenie:
Jeżeli $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 0$ to jest ona liczbą pierwszą

Dowód:
$n = \mathrm{char}(\mathbb{F})$ oraz $n = k \cdot l$, $k, l \in \mathbb{N}$ $k, l > 1$, to $\underset{0}{\varphi(n)} = \varphi(k \cdot l) = \varphi(k) \cdot \varphi(l) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(k) = 0$ lub $\varphi(l) = 0$
$\Downarrow$
n miało najmniejszy taki, że $\varphi(n) = 0$, a $k, l < n$

WIELOMIANY

Definicja:
Wielomianem o współczynnikach w $\mathbb{F}$ nazywamy napis postaci:

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ oraz $a_n \neq 0$

Wielomiany można dodawać i mnożyć. Zbiór wielomianów nie tworzy ciała, nie każdy wielomian ma odwrotny.

Zbiór wielomianów oznaczamy symbolem $\mathbb{F}[X]$ (pierścień wielomianów)

Dla $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ definiujemy stopień wielomianu f:

$$\deg f \begin{cases} n & \text{jeśli } n>0 \\ 0 & \text{jeśli } n=0 \quad a_0 \neq 0 \\ -\infty & \text{jeśli } n=0 \quad a_0 = 0 \end{cases}$$

Stwierdzenie:
$f, g \in \mathbb{F}[X]$. Wówczas
1) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$
II) $\deg(f+g) \leqslant \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

PIERWIASTKI

Definicja:
$f \in \mathbb{F}[X]$, $\zeta \in \mathbb{F}$. Wartością f na ζ nazywamy element postaci:

dzeta

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n$$

i oznaczamy $f(\zeta)$. Mówimy, że ζ jest pierwiastkiem jeśli $f(\zeta)=0$

Przykład:
$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ $\quad f \in \mathbb{Z}_2[X] \quad f(X) = X$
$\quad g \in \mathbb{Z}_2[X] \quad g(X) = X^2$

Uwaga: $\forall_{\zeta \in \mathbb{F}}\ f(\zeta) = g(\zeta)$

DZIELENIE Z RESZTĄ

Twierdzenie:
Niech $f, g \in \mathbb{F}[X]$. Wówczas $\exists_{q, r \in \mathbb{F}[X]}$ takie, że:
$\deg(r) < \deg(g)$ oraz $f = q \cdot g + r$
Ponadto q i r są wyznaczone jednoznacznie.

Funkcja $\deg(\underline{w})$ zwraca stopień wielomianu $\underline{w}$ jednej zmiennej ($\deg \equiv$ degree)
Funkcja $\deg(\underline{w}, \underline{x})$ zwraca stopień w zmiennej $\underline{x}$ wielomianu $\underline{w}$ wielu zmiennych

Dowód:
Indukcja ze względu na $\deg f$

$$\deg f = 0 \Rightarrow q = 0,\ r = f$$

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi $\forall$

$$\tilde{f} \in \mathbb{F}[X] : \deg \tilde{f} < \deg f$$

Jeśli $\deg f < \deg g$, to kładziemy $q = 0$ i $r = f$

Załóżmy, że $\deg(f) \geq \deg(g)$

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \qquad n \geq m \qquad \tilde{f} = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot g$$
$$g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$$

$$f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot g = \tilde{q} \cdot g + \tilde{r} \qquad \deg \tilde{r} < \deg g$$

$$f = \underbrace{\left(\tilde{q} + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}\right)}_{q} \cdot g + \underset{r}{\underset{\parallel}{\tilde{r}}}$$

Jednoznaczność: $f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = g(q_2 - q_1) \xRightarrow{\deg(r_1 - r_2) < \deg(g)} (q_1 = q_2) \wedge (r_1 = r_2)$

CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, 0, \cdot, 1)$, gdzie

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$$
$$0 = (0,0)$$
$$1 = (1,0)$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathbb{C}$ jest ciałem, gdzie dla $(a,b) \neq 0$ mamy:

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$j\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ injekcja $j(a) = (a,0)$

Od tej chwili utożsamiamy $\mathbb{R}$ z podzbiorem $\mathbb{C}$ przy użyciu j.

$$\mathbb{C}\ (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi$$

gdzie $i \equiv (0,1)$

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$$

Definicja:
Niech $z = a + bi$, $a,b \in \mathbb{R}$ $\qquad z = |z|\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{i\varphi}} = |z|e^{i\varphi}$

Część rzeczywista z: $Re(z) = a$ $\qquad \begin{cases} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi \end{cases}$

Część urojona z: $Im(z) = b$

Sprzężenie zespolone z: $\bar{z} = a - bi$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$$

$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = a$ $\qquad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+$

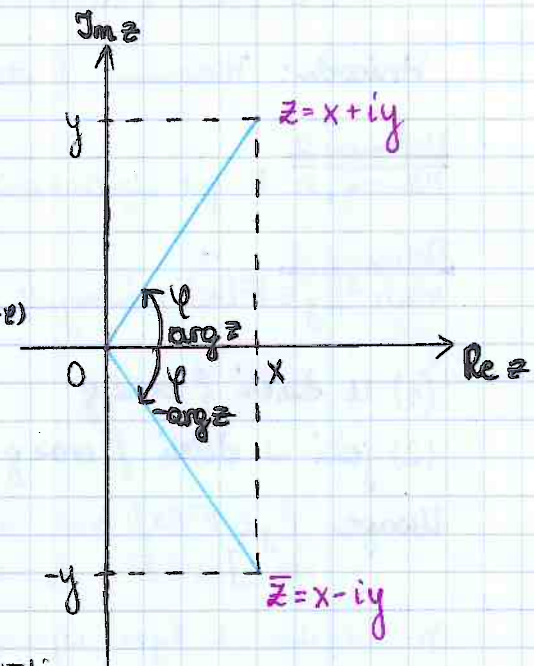
$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = b$

Sprzężenie zespolone - jednoargumentowe działanie algebraiczne określone na liczbach zespolonych polegające na zmianie znaku części urojonej danej liczby zespolonej

Własności

Niech $z, w \in \mathbb{C}$, $a, r \in \mathbb{R}$

- $\bar{r} = r$
- liczba sprzężona do sumy liczb jest suma liczb sprzężonych:
  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- liczba sprzężona do iloczynu liczb jest iloczyn liczb sprzężonych:
  (1) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- moduł liczby sprzężonej jest taki sam, jak moduł danej liczby:
  $|\bar{z}| = |z|$
- jeden z argumentów liczby sprzężonej jest taki sam, jak argument danej liczby, ale z przeciwnym znakiem:
  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $\quad z = |z|e^{i\varphi}$ $\quad \bar{z} = |\bar{z}|e^{i(-\varphi)} = |z|e^{i(-\varphi)}$
- suma danej liczby zespolonej oraz liczby do niej sprzężonej jest liczbą rzeczywistą i wynosi:
  $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
- iloczyn danej liczby zespolonej oraz liczby do niej sprzężonej jest nieujemną liczbą rzeczywistą i wynosi
  (2) $z\bar{z} = |z|^2$, stąd też $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- jeżeli $z = ri$, czyli jest liczbą urojoną, to liczba sprzężona jest liczbą przeciwną do danej:
  $\bar{z} = -z \iff z = ri$ $\qquad -z = -ri = \bar{z}$ $\qquad z = |z|i$ $\quad \bar{z} = -|z|i = -|z|i$
- jeśli z jest pierwiastkiem danego wielomianu rzeczywistego, to $\bar{z}$ też nim jest



(3) $|z \cdot w| = |z||w|$ $\qquad z\bar{w} + \bar{z}w = 2(ac + bd) = 2Re(z\bar{w}) = 2Re(\bar{z}w)$

(4) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ $\qquad$ • $z \cdot w = |z|e^{i\varphi_1} \cdot |w|e^{i\varphi_2} = |zw|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(5) $|z - w| \geqslant ||z| - |w||$ $\qquad$ Argument iloczynu liczb zespolonych jest sumą ich argumentów

Dowód.

(1) $z = a + bi$ $\quad w = c + di$
$\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ $\qquad \bar{z}\bar{w} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc)$

(2) $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 + i(ab - ab)$

(3) $|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2|w|^2$

(4) $|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2Re\,z\bar{w}$ $\qquad (2Re\,z\bar{w} \leqslant 2|z\bar{w}|)$
$\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |\bar{w}| = (|z| + |w|)^2$

(5) $|z| = |z - w + w| \leqslant |z - w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leqslant |z - w|$
Podobnie $|w| - |z| \leqslant |z - w|$
W takim razie $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$

ad. Wielomiany

14.10.2014r

$\mathbb{F} \rightsquigarrow \mathbb{F}[X] \ni f, g \quad \exists!\ q, r \quad \deg(r) < \deg(g)$ oraz $f = q \cdot g + r$

$f \in \mathbb{F}[X]\ ;\ \zeta \in \mathbb{F} \quad f(\zeta) \in \mathbb{F}$

Definicja 1:
$f \in \mathbb{F}[X],\ \zeta \in \mathbb{F}$. Mówimy, że $\zeta \in \mathbb{F}$ jest pierwiastkiem f jeśli $f(\zeta) = 0$

TWIERDZENIE BEZOUT
ζ jest pierwiastkiem $f \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{F}[X]:\ f = (X - \zeta) q$

Dowód:

$(\Leftarrow)$ $f(\zeta) = (\zeta - \zeta) q(\zeta) = 0$

$(\Rightarrow)$ Dzielimy f przez $X - \zeta$, $\exists\, q, r \quad \deg r < 1$

$f = q(X - \zeta) + r$ gdzie $r \in \mathbb{F}$

$0 = f(\zeta) = q(\zeta) \cdot 0 + r \Rightarrow r = 0 \quad f = q(X - \zeta)$

Wniosek: Wielomian f stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków

Definicja 2:
Mówimy, że $\mathbb{F}$ jest algebraicznie domknięte jeśli $\forall f \in \mathbb{F}[X],\ \deg f > 0$ pierwiastek $\zeta \in \mathbb{F}$.

Definicja 3:
Niech $f, g \in \mathbb{F}[X]$. Mówimy, że $u \in \mathbb{F}[X]$ jest największym wspólnym dzielnikiem f i g jeśli:

(1) **u dzieli f oraz g**

(2) **jeśli w dzieli f oraz g, to w dzieli u**

Uwaga $f, g \in \mathbb{F}[X]$ oraz $u_1, u_2 \in \mathbb{F}[X]$ spełniające (1) i (2) z Definicji 3, to $\exists\, \alpha \in \mathbb{F} \quad u_2 = \alpha u_1$

W związku z tym wprowadza się oznaczenie $NWD(f, g)$

Ponieważ u_2 dzieli u_1, to $\exists\, q \in \mathbb{F}[X]$ takie, że

$$u_1 = q \cdot u_2 \Rightarrow \deg(u_1) \geq \deg(u_2)$$

Przez symetrię: $\exists\, \tilde{q}: u_2 = \tilde{q} \cdot u_1 \Rightarrow \deg(u_1) \leq \deg(u_2)$

a stąd: $\deg u_1 = \deg u_2$ oraz $\deg(q) = 0$, a więc $q \in \mathbb{F}$

TWIERDZENIE
Niech $f, g \in \mathbb{F}[X]$. Rozważmy następujący algorytm:

$$\begin{cases} f = q_1 g + r_1 \\ g = q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 = q_3 r_2 + r_3 \\ \vdots \\ r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \\ r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} = q_{n+1} r_n \end{cases}$$

Wówczas $NWD(f,g) = r_n$. Ponadto istnieją wielomiany $u, v \in \mathbb{F}[X]$ takie, że $NWD(f,g) = u\cdot f + v\cdot g$.

Dowód:
r_n - dzieli f oraz g. Ponieważ r_n dzieli r_{n-1} oraz r_{n-2}, a wówczas dzieli r_{n-3} itd.
... r_n dzieli f oraz g.
Ponadto przypuśćmy, że $u \in \mathbb{F}[X]$ dzieli f oraz g. Wówczas u dzieli g i r_1, a wówczas dzieli r_1 i r_2 itd. ... u dzieli r_{n-1} oraz r_n.
Zatem: $r_n = NWD(f,g)$

Wykażemy istnienie u, v

$r_1 = f - q_1 g \quad / \cdot q_2 \quad \Rightarrow g - r_2 = q_2 f - q_1 q_2 g$

a stąd: $r_2 = (1 + q_2 q_1) g - q_2 f$ itd. ... $r_1 = uf + vg$

ad. liczby zespolone

LICZBY O MODULE 1

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Stwierdzenie:
$z \in \mathbb{T} \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$

Dowód:
$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$

POSTAĆ BIEGUNOWA LICZBY ZESPOLONEJ

Lemat
Niech $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists r \in \mathbb{R}_+$ oraz $u \in \mathbb{T}$ takie, że $z = r\cdot u$.
Ponadto rozkład ten jest jednoznaczny.

Dowód:
$z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0 \quad z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \Rightarrow r = |z| \quad u \in \frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}$

Jednoznaczność: jeśli $z = r' \cdot u'$ to $z\bar{z} = r'u'r'\bar{u}' = r'^2$

Zatem $r' = |z| = r$ oraz $u' = \frac{z}{r'} = \frac{z}{|z|} = u$

FUNKCJA EXP

Istnieje funkcja $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}$ taka, że

1. $\forall_{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \exists_{w \in \mathbb{C}} : z = \exp(w)$
2. $\forall_{w_1, w_2 \in \mathbb{C}} : \exp(w_1 + w_2) = \exp(w_1)\cdot\exp(w_2)$
3. $\forall_{w \in \mathbb{C}} \ \overline{\exp(w)} = \exp(\bar{w})$
4. $\exp(0) = 1$
5. $t \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(t) = 1$, to $t = 0$

$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\exp(2\pi i) = 1$

Notacja $e^z \overset{ozn.}{\equiv} \exp(z)$

Stwierdzenie:

Niech $w \in \mathbb{C}$. Wówczas $\exp(w) \in \mathbb{T} \Leftrightarrow w = it$ dla $t \in \mathbb{R}$

Dowód:

$(\Leftarrow)$ $w = it$ $\quad \overline{\exp(w)} = \exp(\overline{w}) = \exp(-w) \overset{②\,i\,④}{=} (\exp(w))^{-1}$

a zatem $\exp(w) \in \mathbb{T}$

$(\Rightarrow)$ $\exp(w) \in \mathbb{T} \Rightarrow \overline{\exp(w)} \cdot \exp(w) = 1$

$$\Rightarrow \exp(\overline{w}) \cdot \exp(w) = \exp(\overline{w} + w) = 1$$

Korzystając z ⑤ $\overline{w} + w = 0$, a zatem $w = it$

$\exp(-w)\exp(w) = \exp(-w+w) = \exp(0) = 1$, a zatem $\exp(-w) = (\exp(w))^{-1}$

Wracając do postaci biegunowej:

$$\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \ \exists\ r, t \in \mathbb{R} : z = re^{it}$$

Funkcje: $\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cos: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\sin(z) \overset{def}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos(z) \overset{def}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

W szczególności mamy:

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

gdzie: $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$ $\quad \sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$

LICZBA π

Dowodzi się na analizie, że istnieje najmniejsza $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, takie że $e^{it} = 1$

Liczbę tą oznaczamy symbolem 2π

$e^{2\pi i} = 1$, a stąd:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

wzór Eulera

21.10.2014 r.

PRZESTRZEŃ WEKTOROWA

Definicja:
Przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy czwórkę $(X, +, 0, \cdot)$, gdzie:

- X jest zbiorem

NOTACJA

$+ : X \times X \to X$ $(x,y) \mapsto x+y$

$0 \in X$

$\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$

takie, że:

- $\forall_{x,y\in X} \quad x+y = y+x$
- $\forall_{x,y,z\in X} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
- $\forall_{x\in X} \quad x+0 = x$
- $\forall_{x} \exists_{y}: \quad x+y = 0$

- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{F}} \forall_{x\in X} \quad \alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$
- $\forall_{x\in X} \quad 1\cdot x = x$
- $\forall_{\alpha\in\mathbb{F}} \forall_{x,y\in X} \quad \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$
- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{F}} \forall_{x\in X} \quad (\alpha+\beta)x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$

Przykłady:

1° $X = \{*\}$ - zbiór jednopunktowy

$+: \ * + * = *, \quad \alpha \cdot * = *, \quad * = 0$

Trywialna przestrzeń wektorowa na $\mathbb{F}$

2° $(\mathbb{F}, +, 0, \cdot, 1)$ - ciało

$(\mathbb{F}, +, 0, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

3° $\mathbb{F}$, $X = \mathbb{F}^n$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in X$ gdzie $x \in \mathbb{F}$

dodawanie: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ $x+y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$

$\alpha\cdot x = \begin{bmatrix} \alpha\cdot x_1 \\ \alpha\cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha\cdot x_n \end{bmatrix}$ $X \ni 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$(X, +, 0, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$

4° $M_{k,l}(\mathbb{F})$ - macierze k-wierszowe, l-kolumnowe o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$, dodawanie, mnożenie przez skalary "po współrzędnych"

5° $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ i niech $\mathbb{F}'$ będzie podciałem ciała $\mathbb{F}$. $X = \mathbb{F}$ z dodawaniem takim jak w $\mathbb{F}$ i mnożeniem:

$$\mathbb{F}' \times \mathbb{F} \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x \in \mathbb{F}$$

jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}'$

W szczególności:

- $\mathbb{C}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{F}$ - ciało skończone char p to $\mathbb{Z}_p$ jest podciałem $\mathbb{F}$, czyli $(\mathbb{F}, +, 0, \cdot)$ jest przykładem przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{Z}_p$.

Korzystając z powyższego udowodnimy, że liczba elementów ciała skończonego jest postaci p^n $n \in \mathbb{N}$

6° $X = C[0,1]$ - przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ o wartościach w $\mathbb{C}$

$$f, g \in C[0,1] \Rightarrow (f+g)(t) = \overset{\mathbb{C}}{f(t)} + \overset{\mathbb{C}}{g(t)}$$

$$(\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \quad \text{gdzie } t \in [0,1], \alpha \in \mathbb{C}, f \in X$$

$$0(t) = 0 \in \mathbb{C}$$

elementami X są funkcje $f: [0,1] \to \mathbb{C}$

$(C[0,1], +, 0, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$

BAZA I WYMIAR PRZESTRZENI WEKTOROWEJ

Naszym celem jest wprowadzenie pojęcia bazy i wymiaru przestrzeni wektorowej

Definicja:
X - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$
Niech $\{x_1, \dots, x_k\} \in X$.

KOMBINACJĄ LINIOWĄ elementów $\{x_1, \dots, x_k\}$ nazywamy wektory postaci:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k \quad \text{gdzie } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$$

Definicja:
Mówimy, że układ wektorów $\{x_1, \dots, x_k\}$ jest LINIOWO NIEZALEŻNY, jeśli zachodzi następująca implikacja:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0)$$

Definicja:
Niech $S \subset X$. Mówimy, że S jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych, jeśli każdy skończony podzbiór S jest liniowo niezależny.

Definicja:
Niech $\emptyset \neq S \subset X$. POWŁOKĄ LINIOWĄ S nazywamy zbiór elementów $x \in X$ takich, że $\exists n \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ i $x_1, \ldots, x_n \in S$, takie że:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Notacje: span S, lin S, $\langle S \rangle$

Uwaga: S nie musi być zbiorem liniowo niezależnym.

Stwierdzenie
$S \subset X$, $S \neq \emptyset$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1) S nie jest liniowo niezależny

2) $\exists x \in S$ będący kombinacją liniową układu wektorów różnych od x z S.

Dowód:

1) $\Rightarrow$ 2)
Istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ nie wszystkie równe 0, oraz $x_1, \ldots, x_k \in S$ takie, że $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$.

Bez straty ogólności $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $x_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot x_3 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot x_k$

2) $\Rightarrow$ 1)
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$, to
$-x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow S$ **nie jest zbiorem liniowo-niezależnych wektorów**

Definicja:
Mówimy, że zbiór $\mathcal{B} \subset X$ liniowo niezależnych wektorów jest BAZĄ X, jeśli

$$\text{span } \mathcal{B} = X$$

Przykłady:

1° $X = \mathbb{F}^n$. BAZA STANDARDOWA $\mathcal{B}_{st}$

$$\mathcal{B}_{st} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2° $X = M_{k,l}(\mathbb{F})$ $\quad \mathcal{B} = \left\{ e_{ij} : \begin{matrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \end{matrix} \right\}$ gdzie:

$$e_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{i-ty wiersz} \\ \uparrow & \\ \text{j-ta kolumna} & \end{array}$$

Definicja:
Mówimy, że X jest PRZESTRZENIĄ SKOŃCZENIE WYMIAROWĄ jeśli posiada skończoną bazę.

Pytanie: Czy $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ jest skończenie wymiarowa?

Uwaga: Każda przestrzeń wektorowa posiada bazę. lemat Kuratowskiego-Zorna.

Stwierdzenie:
$\mathcal{B} \subset X$ jest bazą X wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{B}$ jest maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

Dowód:
Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest bazą. Niech $x \in X \setminus \mathcal{B}$
Wówczas $\{x\} \cup \mathcal{B}$ nie jest zbiorem liniowo niezależnych wektorów. Rzeczywiście:

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}$

$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$-x + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ – zaprzecza liniowej niezależności $\{x\} \cup \mathcal{B}$

$(\Leftarrow)$ Niech $\mathcal{B}$ będzie maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

Przypuśćmy, że $\exists\, x \in X \quad x \notin \operatorname{span} \mathcal{B}$

Wówczas $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \quad x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}$ mamy $x - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n \neq 0 \ (*)$

A stąd $\{x\} \cup \mathcal{B}$ jest liniowo niezależny

Istotnie, bo jeśli $\beta x + \beta_1 x_1 + \dots \beta_n x_n = 0$, to bez straty ogólności $\beta \neq 0$, a wtedy

$$x - \frac{\beta_1}{\beta} x_1 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta} x_n = 0$$ – sprzeczność z $(*)$

28.10.2014r.

Stwierdzenie:
Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$ $(X/\mathbb{F})$
$\mathcal{B} \subset X$ (układ wektorowy w X)

Następujące warunki są równoważne:

1) $\mathcal{B}$ jest bazą

2) Każdy wektor y można zapisać jako kombinację liniową elementów $\mathcal{B}$ w dokładnie jeden sposób

Dowód
Pomocniczy fakt: Niech $E \subset X$, E jest liniowo zależnym podzbiorem $X \Leftrightarrow \exists\, y \in X$, który można przedstawić na dwa różne sposoby jako kombinację liniową elementów E.

$(\Rightarrow)$ Mamy dwa przedstawienia $0 \in X$

$0 = 0 \cdot x$, gdzie $x \in E$

$\exists\, x_1, \dots, x_n \in E$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$

$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

$\Leftarrow$ y ma dwa przedstawienia:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, x_1,\dots,x_n \in \mathcal{E} \quad \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{F} \\ \quad y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ \exists\, y_1,\dots,y_n \in \mathcal{E} \quad \beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{F} \\ \quad y=\sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i \end{array}\right\} \text{2 różne przedstawienia}$$

Pisząc $0 = y - y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \quad (*)$

Mamy dwa przypadki:

① $n=m$ i bez straty ogólności $x_i = y_i$, $i=1,\dots,n$
Wówczas $\exists\, i_0 \in \{1,\dots,n\}$ $\quad \alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$ (bo mamy różne przedstawienia)
i $(*)$ jest kombinacją liniową o niezerowych współczynnikach, która daje 0.
A więc $\mathcal{E}$ jest liniowo zależny

② Zbiory wektorów $\{y_1,\dots,y_n\}$ i $\{x_1,\dots,x_n\}$ są różne
Podobnie 0 będzie kombinacją liniową nietrywialną

① $\Rightarrow$ ②

$\mathcal{B}$ jest układem liniowo niezależnym, bo wektory przedstawiają się na jeden sposób

Ponadto $\operatorname{span} \mathcal{B} = X$, a więc wszystkie wektory przedstawiają się na jeden sposób.

② $\Rightarrow$ ①

$\operatorname{span} \mathcal{B} = X$ - oczywiste. Ponadto jednoznaczność daje liniową niezależność

TWIERDZENIE
Każda przestrzeń wektorowa posiada bazę (dowód bazuje - Lemat Kuratowskiego-Zorna / wykorzystuje pewnik wyboru)

TWIERDZENIE
$\mathcal{E} \subset X$ - układ liniowo niezależny
Wówczas istnieje baza $\mathcal{B} \subset X$, taka że $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$

Definicja
Mówimy, że przestrzeń X jest **SKOŃCZENIE WYMIAROWA**, jeśli posiada bazę ze skończenie wielu elementów

Cel: Wykazać, że bazy przestrzeni skończenie wymiarowej są równoliczne

Lemat Steinitza

Niech X będzie przestrzenią skończenie wymiarową i układ $\{y_1, \dots, y_n\}$ będzie liniowo niezależny. Wówczas istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni X, taka że $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{B}$

Dowód:

Niech $\mathcal{B}_0$ - baza

$E = \mathcal{B}_0 \setminus \{y_1, \dots, y_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Rozważmy układ wektorów

$\{y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\}$

Jest jasne, że $\mathcal{B}_0 \subset \{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\}$.

A stąd $X = \operatorname{span} \mathcal{B}_0 \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\} \subset X$

Czyli $X = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\}$

Przypuśćmy że $\{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\}$ jest liniowo zależny

$0 = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$

Któreś $\beta_i \neq 0$ (bo inaczej układ $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest liniowo zależny

Bez straty ogólności $i = 1$

Wówczas: $x_1 = \frac{\alpha_1}{-\beta_1} y_1 + \dots + \frac{\alpha_m}{-\beta_1} y_m + \frac{\beta_2}{-\beta_1} x_2 + \dots + \frac{\beta_k}{-\beta_1} x_k$

x_1 jest w powłoce liniowej tych elementów

a wtedy $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_2, \dots, x_k\}$

Kontynuujemy, dopóki $\{y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_k\}$ jest układem liniowo niezależnym

$\mathcal{B} = \{y_1, \dots, y_m, x_i, \dots, x_k\}$

Stwierdzenie

Niech X będzie przestrzenią skończenie wymiarową i niech $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie bazą X. Niech $\{y_1, \dots, y_n\}$ będzie układem liniowo niezależnym. Wówczas ten układ jest bazą X.

Dowód:

Niech $y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\alpha_1 \neq 0$.

Wtedy $x_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$

$\operatorname{span}\{y_1, x_2, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = X$

Krok indukcyjny:

$\operatorname{span}\{y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} = X$

$y_{k+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_k y_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_n x_n$

Gdyby $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ to pojawiłaby się sprzeczność z liniową niezależnością $\{y_1, \dots, y_n\}$

Bez straty ogólności $\alpha_{k+1} \neq 0$. Wyrażając x_{k+1} przez $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$ wnioskujemy, że $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\} = X$

Po n-krokach $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\} = X$

A więc $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest bazą X

TWIERDZENIE

X - przestrzeń skończenie wymiarowa

$\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ - baza X

$\mathcal{B} = \{y_1, \dots, y_l\}$ - baza X

Wówczas $n = l$

Dowód

Przypuśćmy, że $l > n$. Wówczas $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest bazą X

W takim razie $y_l \in \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\} \Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo zależny

$\lightning$

Podobnie $n > l \rightarrow$ <u>sprzeczność</u>, a więc $l = n$

Definicja

X - przestrzeń skończenie wymiarowa

WYMIAREM X nazywamy liczbę elementów dowolnej bazy X i oznaczamy $\stackrel{OZN}{\equiv} \dim X$

<u>Wniosek</u>: Liczba elementów ciała skończonego $\mathbb{F}$ jest postaci p^n, gdzie p jest **charakterystyką** $\mathbb{F}$, a $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{F}$ - $\mathbb{F}$ jest <u>przestrzenią wektorową</u> nad $\mathbb{Z}_p$

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{Z}_p$

Kombinacji liniowych jest p^n $|\mathbb{F}| = p^n$

4.11.2014r.

Definicja:

Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Mówimy, że odwzorowanie $\Phi: X \rightarrow Y$ jest IZOMORFIZMEM jeśli Φ jest bijekcją taką, że

$$\forall_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \\ \text{skalary}}} \forall_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \text{wektory}}} \Phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \Phi(x_1) + \alpha_2 \Phi(x_2)$$

Własności:

1) $\Phi(0) = 0$

2) Φ - IZOMORFIZM, to Φ^{-1} też

3) Z - przestrzeń nad $\mathbb{F}$ $\Psi: Y \rightarrow Z$ IZOMORFIZM, to $\Psi \circ \Phi: X \rightarrow Z$ jest IZOMORFIZMEM

OZNACZENIE: $X \simeq Y$; izomorficzne

Stwierdzenie

X, Y, Φ - jak wyżej

$\{x_i\}_{i\in I}$ - układ liniowo niezależnych wektorów przestrzeni X

zbiór indeksów może nie być skończony

Wówczas $\{\Phi(x_i)\}_{i\in I}$ jest **liniowo niezależnym układem wektorów Y**

Dowód:

Niech $i_1, \dots, i_n \in I$ - parami różne oraz $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{F}$.

Jeśli $\alpha_{i_1}\Phi(x_{i_1}) + \alpha_{i_2}\Phi(x_{i_2}) + \dots + \alpha_{i_n}\Phi(x_{i_n}) = 0$

to $\Phi(\alpha_{i_1}x_{i_1} + \alpha_{i_2}x_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}x_{i_n}) = 0$

Stąd $\alpha_{i_1}x_{i_1} + \alpha_{i_2}x_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}x_{i_n} = 0$

Wniosek 1:

Jeśli $\{x_i\}_{i\in I}$ jest bazą przestrzeni X, to $\{\Phi(x_i)\}_{i\in I}$ jest bazą Y.

Dowód:

$\{\Phi(x_i)\}_{i\in I}$ jest liniowo niezależny.

Ponadto $\forall_{y\in Y} \exists_{x\in X} : \Phi(x) = y$

Jeśli $x = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}x_{i_n}$, to $y = \Phi(x) = \alpha_{i_1}\Phi(x_{i_1}) + \dots + \alpha_{i_n}\Phi(x_{i_n})$

Stwierdzenie:

Niech X jak wyżej

$\dim X = n < \infty$

Wówczas X jest PRZESTRZENIĄ IZOMORFICZNĄ z $\mathbb{F}^n$

Dowód:

Niech $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Niech $\Phi : \mathbb{F}^n \to X$ będzie dane wzorem

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Bijektywność Φ → **surjektywność** - każdy wektor daje się zapisać w bazie

Bijektywność Φ → **iniektywność** - zapis ten jest jednoznaczny

(*) sprawdza się bardzo łatwo

Wniosek 2:

X, Y - przestrzenie nad $\mathbb{F}$ skończenie wymiarowe, to X jest izomorficzna z Y

(*) wtedy i tylko wtedy gdy **$\dim X = \dim Y$**

$\Rightarrow$ patrz wniosek 1

$\Leftarrow$ $\Phi : \mathbb{F}^n \to X$, $\Psi : \mathbb{F}^n \to Y$; $\Psi \circ \Phi^{-1} : X \to Y$ jest izomorfizmem

Definicja:
Niech X będzie przestrzenią nad $\mathbb{F}$ oraz $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$.
Mówimy, że Y jest podprzestrzenią X jeśli:

$$\forall_{y_1, y_2 \in Y} \forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}} \; \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$$

Uwaga: $(Y, 0, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa
"obcięcie + do Y" "obcięcie · do Y"

Stwierdzenie:
Niech Y będzie podprzestrzenią X, $\dim X < \infty$. Wówczas $\dim Y \leq \dim X$.
Ponadto, jeśli $\dim Y = \dim X$, to $Y = X$

Dowód:
Bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni Y można uzupełnić do bazy przestrzeni, a więc $\dim Y \leq \dim X$.
Niech $n = \dim X = \dim Y$ $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ - baza Y
Pokazywaliśmy, że układ liniowo niezależnych n wektorów jest bazą $X \Rightarrow Y = \mathrm{span}(\mathcal{B}) = X$

Stwierdzenie:
Niech $\{Y_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną podprzestrzeni X
Wówczas $\bigcap_{i \in I} Y_i$ jest podprzestrzenią X

Dowód:
Niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ oraz $x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} Y_i$
Wtedy $\forall_{i \in I}$ $x_1, x_2 \in Y_i$. Ponieważ Y_i jest podprzestrzenią, to:
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Y_i \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \bigcap_{i \in I} Y_i$

Wniosek:
Niech $S \subset X$. Istnieje najmniejsza podprzestrzeń $Y \subset X$ taka, że $S \subset Y$

Dowód:
Niech $\{Y_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni zawierających S.
Jest ona niepusta: $X \in \{Y_i\}_{i \in I}$

$S \subset \bigcap_{i \in I} Y_i$ ← podprzestrzeń, zawiera S i jest najmniejszą (zawierającą S)

Uwaga: $\langle S \rangle = \bigcap_{i \in I} Y_i$, $\langle S \rangle = \mathrm{span}(S)$.

Gdyż span(S) jest przestrzenią wektorową, zawiera S i każda podprzestrzeń zawierająca S zawiera span(S)

Definicja:
Niech Y_1, Y_2 będą podprzestrzeniami X.
Wówczas $\{y_1 + y_2 : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$ jest podprzestrzenią X którą oznaczamy $Y_1 + Y_2$
i nazywamy SUMĄ PODPRZESTRZENI
$Y_1 + Y_2$ jest podprzestrzenią X

TWIERDZENIE
$\dim X < \infty$ Y_1, Y_2 - jak wyżej

$$\dim(Y_1 + Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2)$$

lemat:
Niech: $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$
$S_1 \subset Y_1$ będzie układem liniowo niezależnych wektorów w Y_1
$S_2 \subset Y_2$ będzie układem liniowo niezależnych wektorów w Y_2
Wówczas $S_1 \cup S_2$ jest liniowo niezależny

Dowód:
$S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $S_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k}_{Y_1 \ni x} + \underbrace{\beta_1 y_1 + \dots + \beta_l y_l}_{y \in Y_2} = 0$$

$x = -y \in Y_2 \Rightarrow x \in Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ czyli $x = 0$
a stąd: $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ Dalej $\beta_1 y_1 + \dots + \beta_l y_l = 0 \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_l = 0$

Dowód twierdzenia:
Niech $l = \dim(Y_1 \cap Y_2)$, $m = \dim Y_1$, $n = \dim Y_2$ | Jeśli $l = 0$, to biorąc $S_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ - bazę Y_1 oraz $S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ - bazę Y_2 dostaję $S_1 \cup S_2$ - bazę $Y_1 + Y_2$

A więc $\dim(Y_1 + Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2)$

Jeśli $l > 0$: niech $S = \{v_1, \dots, v_l\}$ będzie bazą $Y_1 \cap Y_2$. Rozszerzamy S do bazy S_1, S_2 przestrzeniami Y_1, Y_2: $S_1 = \{v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_{m-l}\}$
$S_2 = \{y_1, \dots, y_{n-l}, v_1, \dots, v_l\}$

Wykażemy, że układ $\{y_1, \dots, y_{n-l}, v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_{m-l}\}$ jest bazą $Y_1 + Y_2$.
Wówczas $\dim(Y_1 + Y_2) = n - l + l + m - l = n + m - l = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) + \dim(Y_1 + Y_2)$

1) $\operatorname{span} \mathcal{B} = Y_1 + Y_2$ bo
$\operatorname{span}\{y_1, \dots, v_l\} = Y_1$ $\operatorname{span}\{v_1, \dots, x_{m-l}\} = Y_2$

2) $$\underbrace{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n-l} y_{n-l}}_{\in Y_1} + \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots \beta_l v_l + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_{m-l} x_{m-l}}_{\in Y_2} = 0$$

Stąd $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n-l} y_{n-l} \in Y_1 \cap Y_2$.

$\exists\, \delta_1, \dots, \delta_p$ $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-l} - \delta_1 v_1 - \dots - \delta_p v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-l} = 0$

A stąd $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_l v_l + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_{m-l} x_{m-l} = 0$

W takim razie: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_l = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m-l} = 0$

18.11.2014r.

Niech X, Y będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{F}$. W iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ wprowadzamy strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{F}$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

$$0_{X \times Y} = (0_X, 0_Y)$$

$(X \times Y, +, \cdot, 0_{X \times Y})$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$

Przestrzeń tą nazywamy **SUMĄ PROSTĄ** przestrzeni X i Y i oznaczamy symbolem $X \oplus Y$

Stwierdzenie:

Niech Y_1, Y_2 będą podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni X takimi, że:

1) $X = Y_1 + Y_2$ suma algebraiczna

2) $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

Wówczas odwzorowanie:

$$Y_1 \oplus Y_2 \ni (y_1, y_2) \xmapsto{\Phi} y_1 + y_2 \in X$$

jest **IZOMORFIZMEM**

Mówimy wówczas, że X jest **SUMĄ PROSTĄ** podprzestrzeni Y_1 i Y_2

Dowód:

Φ jest odwzorowaniem liniowym

$z_1, z_2 \in Y_1 \oplus Y_2$

$\Phi(z_1 + z_2) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2)$

$\alpha \in \mathbb{F}$

$\Phi(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot \Phi(z)$

Musimy sprawdzić, że Φ jest bijekcją

Φ jest "na", bo 1)

Φ jest różnowartościowe

$$\Phi((y_1, y_2)) = \Phi((\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)) \iff y_1 + y_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \iff Y_1 \ni y_1 - \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 - y_2 \in Y_2$$

Korzystając z 2) widzimy, że $y_1 - \tilde{y}_1 = 0 = \tilde{y}_2 - y_2$ a więc $(y_1, y_2) = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

Uwaga:

Niech $Y_1, Y_2 \subset X$ - podprzestrzenie X

Jeśli odwzorowanie $Y_1 \oplus Y_2 \ni (y_1, y_2) \longmapsto y_1 + y_2 \in X$

jest izomorfizmem, to $Y_1 + Y_2 = X$ oraz $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$

PRZESTRZEŃ ILORAZOWA

Niech Y będzie podprzestrzenią X
Rozważmy relację $\mathcal{R}$ w $X \times X$ gdzie $x_1 \sim_{\mathcal{R}} x_2$ jeśli $x_1 - x_2 \in X$

Fakt
$\mathcal{R}$ jest RELACJĄ RÓWNOWAŻNOŚCI

- zwrotność $\quad x \sim_R x$, bo $x - x = 0 \in Y$
- symetryczność $\quad x_1 \sim_R x_2$, bo $x_1 - x_2 \in Y$ a więc $x_2 - x_1 \in Y$, $x_2 \sim_R x_1$
- przechodniość $\quad x_1 \sim_R x_2 \wedge x_2 \sim_R x_3 \Rightarrow x_1 \sim_R x_3$
  bo $x_1 - x_2 \in Y \wedge x_2 - x_3 \in Y \Rightarrow x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in Y$

KLASY ABSTRAKCJI $\mathcal{R}$

$x_1 \sim_R x_2$ to $\exists y \in Y \quad x_2 = x_1 + y$

Na odwrót jeśli $x_2 = x_1 + y$, to $x_2 - x_1 = y \in Y$, a więc $x_1 \sim_R x_2$

W takim razie $[x]_R = \{x + y : y \in Y\} \overset{\text{ozn}}{\equiv} x + Y$

Definicja:
X_1, X_2 - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{F}$

Odwzorowanie $T: X_1 \longrightarrow X_2$ nazywamy LINIOWYM jeśli:

$\forall_{x,y \in X_1} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{F}}$ mamy:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Stwierdzenie:
W przestrzeni $X/_R$ klas abstrakcji relacji $\mathcal{R}$ można wprowadzić strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{F}$ wzorem:

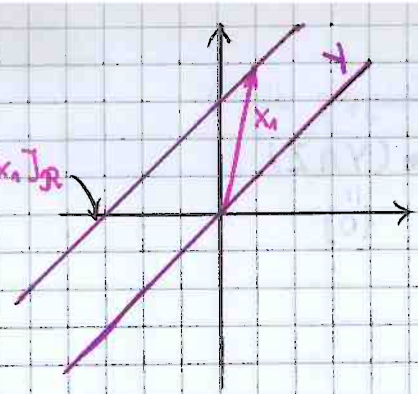
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ [x_1]_R + [x_2]_R = [x_1 + x_2]_R \\ \bullet\ \alpha \cdot [x]_R = [\alpha \cdot x]_R \\ \bullet\ 0 = [0]_R \end{array}\right\} (*)$$

Ponadto odwzorowanie $X \ni x \longmapsto [x]_R \in X/_R$ jest LINIOWE

Uwaga
$X/_R$ nazywamy ILORAZEM PRZESTRZENI X przez podprzestrzeń Y.
Przestrzeń wektorowa wprowadzona powyżej oznaczana jest symbolem $X/_Y$
Zauważmy, że dla $x_1 \in X$

$$\left.\begin{array}{l} [x_1]_R = x_1 + Y \\ [x_2]_R = x_2 + Y \end{array}\right\} [x_1]_R + [x_2]_R = x_1 + x_2 + Y$$

Rysunek:



$X = \mathbb{R}^2$

Dowód:
Udowodnimy, że dodawanie w $X/_R$ jest dobrze zdefiniowane (nie zależy od reprezentantów)
Niech:

$[x_1]_R = [x_1']_R \Leftrightarrow x_1 - x_1' \in Y$

$[x_2]_R = [x_2']_R \Leftrightarrow x_2 - x_2' \in Y$

W takim razie $x_1 + x_2 \sim_R x_1' + x_2'$, bo

$x_1 + x_2 - (x_1' + x_2') = x_1 - x_1' + x_2 - x_2' \in Y$

Czyli $[x_1 + x_2]_R = [x_1' + x_2']_R$

Podobnie dla mnożenia przez skalary
Zauważmy (*) oznacza tyle i tylko tyle, że odwzorowanie
$X \ni x \longmapsto [x]_R$ jest LINIOWE

$$X = Y_1 \oplus Y_2 \qquad X/_{Y_1} \overset{\text{izom}}{\simeq} Y_2$$

Definicja:
Niech Y będzie podprzestrzenią X. Mówimy, że podprzestrzeń Z jest DOPEŁNIAJĄCA dla Y jeśli $X = Y + Z$ oraz $Y \cap Z = \{0\}$

Uwaga
Y zawsze ma wiele podprzestrzeni dopełniających. Dlaczego?
Niech $\mathcal{B}_0$ będzie bazą Y, $\mathcal{B}_0 \cup \{x_i\}_{i \in I}$ - baza X
Rozpinamy Z na $\{x_i\}_{i\in I}$: $Z = \operatorname{span}\{x_i\}_{i \in I}$

Stwierdzenie
Przyjmując oznaczenia jak wyżej
Odwzorowanie $Z \ni z \xmapsto{\Psi} z + Y \in X/_Y$ jest IZOMORFIZMEM przestrzeni wektorowych

Dowód:
Ψ jako obcięcie Φ do Z jest liniowe.
Jest "na": $x \in X$ to $x = z + y$, w takim razie:

$$x + Y = z + y + Y = z + Y$$

Różnowartościowość: $z_1, z_2 \in Z$. Przypuśćmy, że:

$z_1 + Y = z_2 + Y \Leftrightarrow \exists y \in Y : Z \ni z_1 - z_2 = y \in Y$

$z_1 - z_2 \in \underbrace{Y \cap Z}_{\{0\}} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$

Wniosek:

$\dim(X) < \infty$, Z będzie podprzestrzenią dopełniającą dla Y

$\dim(X) = \dim(Y+Z) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\underbrace{Y \cap Z}_{=\{0\}})$

$\dim(X/Y) = \dim(Z) = \dim(X) - \dim(Y)$

Definicja

X – przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$

Odwzorowanie liniowe $\Phi: X \to \mathbb{F}$ nazywamy **FUNKCJONAŁEM LINIOWYM** na X

Zamiast pisać $\Phi(x) \overset{\text{OZN}}{\equiv} \langle \Phi | x \rangle$ piszemy

Zbiór funkcjonałów liniowych na X jest **PRZESTRZENIĄ WEKTOROWĄ** nad $\mathbb{F}$:

$\Phi_1, \Phi_2 : X \to \mathbb{F}$ to

$(\Phi_1 + \Phi_2)(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$

oraz

$(\alpha \cdot \Phi)(x) = \alpha \cdot \Phi(x)$

Przestrzeń tą oznaczamy symbolem X^*

$X^{**} \supseteq X$

25.11.2014r.

$X^* = \{\Phi : X \to \mathbb{F},\ \Phi \text{ - liniowe}\}$ – przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

Przykłady:

1. $\lambda^i : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ $\quad \lambda^i\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_n\end{bmatrix}\right) = \alpha_i$

2. $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i \in I}$ – baza X

   $\Phi_i : X \to \mathbb{F}$

   $\Phi_i\left(\sum_{j \in I} \alpha_j x_j\right) = \alpha_i$

3. $C([0,1]) \ni f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

   $x_i \in [0,1]$; $C([0,1]) \ni f \xrightarrow{\delta_{x_0}} f(x_0) \in \mathbb{R}$ – delta Diraca

Zał. $\dim X < \infty$

Stwierdzenie

$\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ - baza X

Wówczas istnieją funkcjonały $\Phi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jednoznacznie wyznaczone warunkiem:

$$\Phi_i(x_j) = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{delta Kroneckera}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Ponadto układ $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ jest bazą X^*

Bazę tą nazywamy **sprzężoną do $\mathcal{B}$** i oznaczamy $\mathcal{B}^*$

Dowód:

Istnienie i jednoznaczność: patrz przykład 2

Liniowa niezależność:

$$\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \dots + \alpha_n\Phi_n = 0 \Rightarrow \alpha_j = (\alpha_1\Phi_1 + \dots + \alpha_n\Phi_n)(x_j) = 0(x_j) = 0$$

$\operatorname{span} \mathcal{B}^* = X^*$; Niech $\Psi \in X^*$; $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ mamy:

$$\Psi(x) = \alpha_1 \Psi(x_1) + \dots + \alpha_n \Psi(x_n) = \Psi(x_1)\cdot\Phi_1(x) + \dots \Psi(x_n)\Phi_n(x) =$$

$$= (\Psi(x_1)\Phi_1 + \dots + \Psi(x_n)\Phi_n)(x)$$

Co oznacza, że $\Psi = \Psi(x_1)\Phi_1 + \dots + \Psi(x_n)\Phi_n$

Przykład:

$X = \mathbb{R}_n[\cdot]$, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

$\mathcal{B}^* = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ gdzie $\Phi_i(w) = \frac{1}{n!} w^{(n)}(0)$

TWIERDZENIE

$\dim(X) < \infty$

Zdefiniujmy odwzorowanie:

$$\mathcal{X} : X \to (X^*)^* \overset{\text{OZN}}{\equiv} X^{**} \quad \text{wzorem} \quad \mathcal{X}(x)(\Phi) := \Phi(x)$$

Wówczas $\mathcal{X}$ jest izomorfizmem

Uwaga: $\langle \Phi, x \rangle =: \langle \mathcal{X}(x), \Phi \rangle \xlongequal[X \simeq X^{**}]{\text{utożsamiając}} \langle x, \Phi \rangle$

Dowód: $\mathcal{X}(x) \in X^{**}$ - łatwe

$$\langle \mathcal{X}(x_1 + x_2), \Phi \rangle = \langle \Phi, x_1 + x_2 \rangle = \langle \Phi, x_1 \rangle + \langle \Phi, x_2 \rangle$$

$$= \langle \mathcal{X}(x_1), \Phi \rangle + \langle \mathcal{X}(x_2), \Phi \rangle$$

$$= \langle \mathcal{X}(x_1) + \mathcal{X}(x_2), \Phi \rangle$$

Zatem $\mathcal{X}(x_1 + x_2) = \mathcal{X}(x_1) + \mathcal{X}(x_2)$

Podobnie $\mathcal{X}(\alpha x) = \alpha \mathcal{X}(x)$

Czyli jest odwzorowaniem liniowym

Różnowartościowość $\mathcal{K}$:

$x_1, x_2 \in X$: $\mathcal{K}(x_1) = \mathcal{K}(x_2)$. Przypuśćmy, że $x_1 \neq x_2$

$\exists \Phi \in X^*: \Phi(x_1 - x_2) \neq 0 \leftarrow$ bo istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni X

$\mathcal{B} = \{x_1 - x_2, y_2, \dots, y_n\}$. Biorąc $\Phi_1 \in \mathcal{B}^*$ mamy $\Phi(x_1 - x_2) = 1$

Wówczas $\langle \mathcal{K}(x_1 - x_2), \Phi \rangle = 0$ ← bo $\mathcal{K}(x_1) = \mathcal{K}(x_2)$

$$\begin{array}{c} \langle \mathcal{K}(x_1 - x_2), \Phi \rangle \\ \| \\ \langle \Phi, x_1 - x_2 \rangle \\ \not\| \\ 0 \end{array}$$

← sprzeczność

$\mathcal{K}$ jest "na": $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie bazą X. Wówczas

$\mathcal{B}^{**} = \{\mathcal{K}(x_1), \dots, \mathcal{K}(x_n)\}$

W takim razie $X^{**} = \operatorname{span} \mathcal{B}^{**} = \{\mathcal{K}(x); x \in X\}$

$\mathcal{K}: X \longrightarrow X^{**}$ $\quad \mathcal{K}(x) \in X^{**}$ $\quad \mathcal{K}(x): X^* \longrightarrow \mathbb{F}$

Stwierdzenie

Niech $Y \subset X$ będzie podprzestrzenią X

Zdefiniujmy: $Y_0 = \{\Phi \in X^* : \forall_{y \in Y} : \Phi(y) = 0\}$

Wówczas Y_0 jest podprzestrzenią X^*, którą nazywamy **ANIHILATOREM Y**.

Dowód:
oczywiste

TWIERDZENIE

Y, X, Y_0 - j.w.

Wówczas:

(1) $\left(X/_Y\right)^*$ jest izomorficzny z Y_0

(2) Y^* jest izomorficzna z $X^*/_{Y_0}$

Dowód:

1. Definiujemy $\Lambda: Y_0 \longrightarrow \left(X/_Y\right)^*$

$y \in Y_0$, $x + Y \in X/_Y$; $\langle \Lambda(y), x + Y \rangle = \langle y, x \rangle$

Dlaczego ma to sens:

$x_1 + Y = x_2 + Y \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \tilde{y} \in Y$

Wówczas $\langle y, x_1 \rangle = \langle y, \tilde{y} + x_2 \rangle = \langle y, x_2 \rangle$

Λ - odwzorowanie liniowe $= \langle y, x_2 \rangle$

Odwzorowanie odwrotne:
Niech $Z \oplus Y = X$ oraz $\Psi \in (X/Y)^*$
(X jest sumą prostą Z i Y)
Zdefiniujmy $\Phi \in X^*$ wzorem $\Phi(z+y) = \Psi(z+Y)$

Można wykazać, że $\Lambda(\Phi) = \Psi$

→ Różnowartościowość Λ jako ćwiczenie

2. $\Gamma : X^*/Y_0 \to Y^*$
Niech $x^* + Y_0 \in X^*/Y_0$, $y \in Y$
Definiujemy $\langle \Gamma(x^* + Y_0), y \rangle \stackrel{def.}{=} \langle x^*, y \rangle$
Sensowność:
$x_1^* + Y_0 = x_2^* + Y_0 \iff x_1^* - x_2^* = y^* \in Y_0$
$\langle x_1^*, y \rangle = \langle x_2^* + y_0, y \rangle = \langle x_2^*, y \rangle$

Γ jest liniowym izomorfizmem

Definicja
X, Y nad $\mathbb{F}$.
Mówimy, że $T: X \to Y$ jest **liniowe**, jeśli:

$$\forall_{\alpha,\beta} \forall_{x_1, x_2 \in X} : T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

- T jest **MONOMORFIZMEM** jeśli T jest różnowartościowe
- T jest **EPIMORFIZMEM** jeśli T jest "na"
- T jest **IZOMORFIZMEM** jeśli T jest epimorfizmem i monomorfizmem
- T jest **ENDOMORFIZMEM** jeśli $X = Y$
- endomorfizm jest **AUTOMORFIZMEM** jeśli jest izomorfizmem

Stwierdzenie
$T: X \to Y$ - liniowe. Zdefiniujmy

$$\ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

$$\mathrm{im}(T) = \{y \in Y : \exists x \in X \ Tx = y\}$$

Wówczas $\ker(T)$ jest podprzestrzenią X, którą nazywamy **JĄDREM T** oraz $\mathrm{im}(T)$ jest podprzestrzenią Y, którą nazywamy **OBRAZEM T**

Dowód: oczywiste

Uwaga: 1) T jest epimorfizmem $\Leftrightarrow \operatorname{im} T = Y$

2) T jest monomorfizmem $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$

$\Rightarrow$ T - monomorfizm, bo ponieważ $T(0) = 0 \Rightarrow \ker(T) = \{0\}$

$\Leftarrow$ $x_1, x_2 : Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker(T) \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

Notacja

$Y \subset X$ - podprzestrzeń

Niech $q_Y : X \longrightarrow X/Y$ oznacza ODWZOROWANIE ILORAZOWE

$q_Y(x) = x + Y$

Stwierdzenie

Niech $T : X \to Y$ będzie liniowe

Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony izomorfizm: $S : X/_{\ker T} \longrightarrow \operatorname{im} T$ taki, że:

$$S \circ q_{\ker T}(x) = T(x)$$

2.12.2014r.

Stwierdzenie

$T : X \to Y$ - odwzorowanie liniowe

$q_{\ker T} : X \longrightarrow X/_{\ker T}$ - odwzorowanie ilorazowe

$T = \Psi_T \circ q_{\ker T}$

Wówczas $\exists! \; \Psi_T : X/_{\ker T} \longrightarrow Y$ takie, że

$$\Psi_T(x + \ker T) = Tx \qquad (*)$$

Ponadto Ψ_T jest monomorfizmem

Dowód:

Definiujemy Ψ_T wzorem $(*)$

Ψ_T jest dobrze zdefiniowane:

$x + \ker T = x' + \ker T$ to $x - x' \in \ker T$, a wówczas $Tx = Tx'$

Liniowość T daje liniowość Ψ_T.

Monomorficzność Ψ_T:

$x + \ker T \in \ker \Psi_T \Leftrightarrow \Psi_T(x + \ker T) = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \ker T \Leftrightarrow x + \ker T \in \ker T$

wektor zerowy $X/_{\ker T}$

a więc $\ker \Psi_T = \{0\}$

Jedyność Ψ_T jest jasna z $(*)$

$\boxed{\text{Wniosek:}}$

$\dim X = \dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) \qquad (**)$

Dowód:

$\operatorname{im} \Psi_T = \operatorname{im} T$, a więc Ψ_T jest izomorfizmem $X/_{\ker T}$ na obraz T.

$\dim \ker T < \infty$, to korzystając z jednego z tw.

$\dim X/_{\ker T} = \dim X - \dim(\ker T) = \dim(\operatorname{im} T)$

Jeśli $\dim(\ker T) = \infty$ to (**) również zachodzi

Zbiór odwzorowań liniowych z $X \to Y$ oznaczamy $\mathcal{L}(X,Y)$

Struktura przestrzeni wektorowej na $\mathcal{L}(X,Y)$:

$T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\beta \in \mathbb{F}$

$T+S$, $\beta T \in \mathcal{L}(X,Y)$, gdzie:

$(T+S)(x) = Tx + Sx$

$(\beta T)(x) = \beta(Tx)$

$\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$

Zauważmy, że dla $T \in \mathcal{L}(X)$, $\overbrace{T \cdot T \cdot \ldots \cdot T}^{n \text{ razy}} \equiv T^n \in \mathcal{L}(X)$

Ogólniej jest $T_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, to $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(X,Z)$

gdzie: $T_2 \circ T_1(x) = T_2(T_1(x))$

Przykład

X - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$

$T \in \mathcal{L}(X)$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$\Phi_T : \underbrace{\mathbb{F}[Z]}_{\text{wielomian}} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$

wzorem $w(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$

$\Phi_T(w) = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n$

(1) Φ_T jest liniowe - jasne

(2) Ponadto $u, w \in \mathbb{F}[Z]$, to:

$$\Phi_T(\underset{\substack{\text{mnożenie} \\ \text{w } \mathbb{F}[Z]}}{u \cdot w}) = \Phi_T(u) \underset{\substack{\text{złożenie} \\ \text{operatorów na } X}}{\circ} \Phi_T(w)$$

Wystarczy to wykazać na jednomianach i skorzystać z liniowości z (1):

$u(Z) = Z^k$, $w(Z) = Z^l$ $(uw)(Z) = Z^{k+l}$

$\Phi_T(uw) = T^{k+l} = T^k \circ T^l = \Phi_T(u) \circ \Phi_T(w)$

Stwierdzenie

X, Y - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{F}$

$\mathcal{E} = \{x_i\}_{i\in I}$ - baza X

$S, T \in \mathcal{L}(X)$ takie, że $S(x_i) = T(x_i)$, $i \in I$

Wówczas $S = T$

Dowód:

$\forall_{x\in X}$ mamy $x = \sum_i \beta_i x_i$, $\beta_i \in \mathbb{F}$

to $T(x) = \sum_i \beta_i T(x_i) = \sum_i \beta_i S(x_i) = S(x)$

Stwierdzenie:

$X, \mathcal{E}$ - jak wyżej

$\{y_i\}_{i\in I}$ - układ wektorów przestrzeni X.

Wówczas dokładnie jeden operator $S: X \to Y$ taki, że $S x_i = y_i$

Dowód:

Definiujemy operator S

$$S\left(\sum_i \beta_i x_i\right) = \sum_i \beta_i y_i$$

S jest liniowy i spełnia warunek $S(x_i) = y_i$, $i \in I$

Jedyność wynika z poprzedniego stwierdzenia

Definicja:

X, Y - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{F}$

$\dim X = k$ $\dim Y = l$

$\mathcal{E} = \{x_i\}_{i=1}$ baza X

$\mathcal{F} = \{y_j\}_{j=1}$ - baza Y

$T: X \to Y$

$\forall_i \exists! \alpha_{ji} \in \mathbb{F}$, gdzie $j \in \{1, \dots, l\}$ takie, że

$$Tx_i = \sum_{j=1} \alpha_{ji} y_j$$

Macierz operatora T w bazach $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ jest to element $M_{l\times k}(\mathbb{F})$ oznaczony symbolem $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, gdzie $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\alpha_{ji}]_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,l}}$ ← wiersze ← kolumny

czyli: $$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kl} \end{bmatrix}$$

Stwierdzenie

$\dim X, \dim Y < \infty$

Przyporządkowanie

$$\mathcal{L}(X,Y) \ni T \longmapsto [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \in M_{\dim Y \cdot \dim X}(\mathbb{F})$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowej

Dowód:

$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\alpha_{ij}]$, $[S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\beta_{ij}]$

$$(T+S)(x_i) = T(x_i) + S(x_i) = \sum_j \alpha_{ji} y_j + \sum_j \beta_{ji} y_i = \sum_j (\alpha_{ji} + \beta_{ji}) y_j$$

W takim razie $[T+S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} + [S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$