Kolokwium 19.11 $\boxed{8:00}$–12:00

1 Tensory, 2 Pola wektorowe 3 Formy różniczkowe (zamiana wsp., $d\omega$ ...) 4 Lemat Poincaré.

Przypomnienie. M – rozmaitość zorientowana, $\dim M = k$

$\sigma: I^k \to M$, $I^k \subset \mathcal{O}$ i σ rozszerza do parametryzacji

$\mathcal{U} \subset M$: $\exists\, \varphi: \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ t. że $\sigma = \varphi^{-1}|_{I^k}$

Dodatkowo żądamy, że φ jest zgodny z orientacją

Twierdzenie

Niech $\sigma_1, \sigma_2: I^k \to M$ będą j.w. i niech $\omega \in \Omega^k(M)$ t. że ω zeruje się poza $\sigma_1(I^k) \cap \sigma_2(I^k)$. Wówczas $\int_{\sigma_1} \omega = \int_{\sigma_2} \omega$.

<u>Dowód</u> $\int_{\sigma_1} \omega = \int_{I^k} \sigma_1^* \omega = \{ \sigma_1^* \omega = f_1 dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \} = \int_{I^k} f_1 dx^1 \ldots dx^k$

$\int_{I^k} (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1)^* (\sigma_2^* \omega) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = g = (y^1(x^1, \ldots, x^k), \ldots, y^k(x^1, \ldots, x^k)) \\ \sigma_2^* \omega = f_2\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^k \\ g^*(f_2\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^k) = \\ \quad f_2(y^1(x^1, \ldots, x^k), \ldots, y^k(x^1, \ldots, x^k)) \det g'\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \end{array} \right\}$

$= \int_{I^k} f_2 \circ g\, |\det g'|\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ Twierdzenie o zamianie zmiennych

dodaję moduł bo σ_1, σ_2 respektują orientację czyli $\det g' > 0$

$= \int_{I^k} f_2(y^1, \ldots, y^k)\, dy^1 \ldots dy^k = \int_{I^k} f_2\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^k = \int_{\sigma_2} \omega$. $\boxtimes$

Rozkłady jedności na rozmaitościach.

Niech M, $\mathcal{U}_i \underset{\text{otw}}{\subset} M$, $i = 1, \ldots, n$, $M = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$. Wówczas istnieją funkcje gładkie $\varphi_i: M \to [0,1]$ t. że

(1) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \mathcal{U}_i$. (2) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$ dla $x \in M$

Całka z k-formy różniczkowej po (zorientowanej) rozmaitości zwartej M, $\dim k$.

$\forall_{p \in M}$ ustalmy otoczenie $\mathcal{U}_p$ punktu p t. że istnieje kostka $\sigma_p: I^k \to M$ t. że $\mathcal{U}_p \subset \sigma_p(I^k)$, gdzie σ_p j.w.

$\{\mathcal{U}_p\}_{p \in M}$ jest pokryciem M. M jest zwartą rozmaitością więc można wybrać podpokrycie skończone $M \subset \mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_\ell$.

Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ będzie odpowiednim rozkładem jedności.

Definiujemy $\int_M \omega = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega$ (*) $\quad \sigma_i, \varphi_i, \omega$

Korzystając z Twierdzenia poprzedniego dowodzi (się), że strona (*) nie zależy od dokonanych wyborów.

<u>Definicja</u> Mówimy podzbiór (domknięty) $D \subset M$ jest k-wymiarową podrozmaitością z brzegiem jeśli: (1) (wnętrze) $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$.

(2) $\forall\, p \in \partial D = D \setminus \operatorname{Int} D$ można znaleźć układ współrzędnych $\varphi = (x^1, \ldots, x^k): \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ wokół $p \in \partial D$ t. że $\varphi(\mathcal{U} \cap D) = \varphi(\mathcal{U}) \cap \{(x^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}$

W szczególności $\varphi(\mathcal{U} \cap \partial D) = \{(x^1, \ldots, x^k) : x^k = 0\}$.

Wniosek ∂D jest rozmaitością k-1-wymiarową (wsp. $(x^1, \ldots, x^{k-1})$)

Jeśli M jest rozmaitością zorientowaną oraz $v_1, \ldots, v_{k-1} \in T_p(\partial D)$ jest bazą to mówimy, że jest ona dodatnio zorientowana jeśli dodatnio zorientowana jest baza $\left(-\frac{\partial}{\partial x^k}, v_1, \ldots, v_{k-1}\right) \in T_p M$.

<u>Przykład</u>. $M = \mathbb{R}^k$, $D = H^k = \{(x^1, \ldots, x^k) : x^k \geq 0\}$, $\partial D = \mathbb{R}^{k-1}$

$(e_1, \ldots, e_k)$ – baza kan. $\mathbb{R}^k$

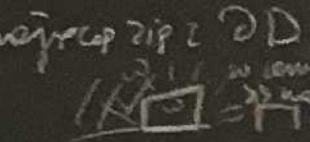
$-\frac{\partial}{\partial x^k} = e_k$. Czyli $e_1, \ldots, e_{k-1} \in T_p \mathbb{R}^{k-1} \simeq \mathbb{R}^{k-1}$ jest bazą.

$\mathcal{E} = (-e_k, e_1, \ldots, e_{k-1})$, $\quad Can = (e_1, \ldots, e_k)$ – kanoniczna orientacja.

Orientacja $\mathcal{E} = \boxed{(-1)^k}$ orient Can.

<u>Przykład</u>. Niech $D \subset M$ j.w. oraz $\sigma: I_k \to D$ będzie kostką t. że $\sigma(I_{k,0})$ jest jedyną ścianą σ przecinającą się z ∂D.

Niech $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ zeruje się poza $\sigma(I^k)$.



Wówczas $\int_{\partial D} \omega = (-1)^k \int_{I_{k,0}} (\sigma^* \omega) = \sum_{i,\alpha} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^{i,\alpha}} (\sigma^* \omega)$ $\{$ bo $\int_{I^{i,\alpha}} \sigma^* \omega = 0$ dla $i \neq k$ oraz $i = k$, $\alpha = 1$ $\}$

$= \int_{\partial \sigma} \omega$.

Twierdzenie Stokesa dla rozmaitości z brzegiem.

Niech D będzie zwartą rozmaitością z brzegiem, $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$.

Wówczas $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.

Dowód.

① Zał., że $\sigma : I^k \to M$ jest takie, że $\sigma(I^k) \subset D \setminus \partial D$ i niech $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ będzie zero poza $\sigma(I^k)$.

Wówczas $\int_{\partial D} \omega = 0$. Natomiast $\int_D d\omega = \int_\sigma d\omega \underset{\text{tw. Stokesa dla łańcuchów}}{=} \int_{\partial\sigma} \omega = 0$ bo $\omega|_{\partial\sigma} = 0$.

② Zał., że $\sigma_{k,0}$ jest jedyną ścianą przecinającą się z ∂D oraz ω zeruje się poza $\sigma(I^k)$. Wówczas

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega \underset{\text{tw. Stokesa dla łańcuchów}}{=} \int_\sigma d\omega = \int_D d\omega.$$

③ Dla każdego $p \in D$ znajduję $\sigma_p : I^k \to M$, $p \in \sigma(I^k)$, i σ_p jest jednym z powyższych przypadków.

$\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$ skończony wybór kostek oraz $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ rozkład jedności.

$\sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i = 1$ $\quad \sum_{i=1}^{\ell} d\varphi_i = 0$. Dalej:

$$\int_D d\omega = \sum_{i=1}^{\ell} \int_D \varphi_i \, d\omega = \sum_{i=1}^{\ell} \int_D d(\varphi_i \cdot \omega) \overset{① \vee ②}{=\!=} \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\partial D} \varphi_i \cdot \omega = \int_{\partial D} \omega.$$

$\blacksquare$