Rozdział 2. Funkcje holomorficzne.

$\mathcal{O} \underset{otw}{\subset} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ Funkcje $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ można traktować jak $f: \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$

Wtedy piszemy $f(z) = f(x+iy) = (\mathrm{Re} f)(x,y) + i(\mathrm{Im} f)(x,y) =$

$= P(x,y) + i\, Q(x,y).$

Przykład: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$P(x,y) = e^x \cos y$, $Q(x,y) = e^x \sin y$

$\forall z \in \mathbb{C}$ istnieje granica ilorazu różnicowego, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$
$= e^z$)

$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$ | $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -e^x \sin y.$

Definicja.
Mówimy $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ ma w $z \in \mathcal{O}$ pochodną zespoloną jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \overset{ozn}{=} f'(z) = \frac{d}{dz} f(z)$

Zauważmy, że $f'(z) \in \mathbb{C}$.

Funkcja 2 zmiennych rzeczywistych $f(x,y)$ ma pochodną rzeczywistą, która jest odwzorowaniem liniowym z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$

Jeśli $f'(z) = a + ib$ to pochodna rzeczywista f ma postać
$\begin{bmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{bmatrix}$. Dygresja: $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 + i h_2$. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^2 \ni h \longmapsto (a+ib)(h_1 + i h_2) \in \mathbb{R}^2$

$(a+ib)(h_1 + ih_2) = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1) = \begin{bmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$

Rzeczywisty iloraz różnicowy: $z = x + iy$, $h = h_1 + ih_2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| f(z+h) - f(z) - \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h}{h} \right| =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| = 0.$$ Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y), & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$$ a więc $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$ | Równania Cauchy'ego-Riemanna

Tw. Jeśli $f = P + iQ$ ma pochodną zespoloną w $z \in \mathcal{O}$ to (P, Q) spełnia r-nia Cauchy'ego-Riemanna.

Na odwrót jeśli $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ j.w. ma pochodną rzeczywistą w $z = x + iy$ oraz (P, Q) spełnia r-nia CR w p-cie (x,y) to f ma w z pochodną zespoloną.

Dowód ($\Leftarrow$) Pochodna rzeczywista $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ ma postać $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Istnieje granica $\lim\limits_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z) - \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{h} \right| = 0 = \lim\limits_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{(a+ib)(h_1 + ih_2)}{h} \right|$

zatem $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a + ib$ $\boxed{\text{B}}$

Własności. f, g mają pochodną w z.

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
2. $(f\cdot g)'(z) = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\, g'(z)$
3. jeśli $g(z) \neq 0$ to $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)\,g'(z)}{g^2(z)}$
4. $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, $g: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ spełniają $\mathcal{U} \supset f(\mathcal{O})$, f ma poch. zesp. w z, g — „ — „ — „ — $f(z)$

$$(g\circ f)'(z) = g'(f(z))\cdot f'(z)$$

$$dP + i\,dQ = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{dz + d\bar z}{2}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\left(\frac{dz - d\bar z}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(iQ) - i\frac{\partial (iQ)}{\partial y}\right)\right)dz$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)d\bar z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(iQ) + i\frac{\partial}{\partial y}(iQ)\right)d\bar z =$$

Definicja Jeśli $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ma postać $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ to $df(z) \overset{def}{=} dP(x,y) + i\,dQ(x,y)$.

f nie musi mieć pochodnej zespolonej

W szczególności: biorąc $f(z) = z$ mamy formę $dz = dx + i\,dy$

biorąc $f(z) = \bar z$ mamy formę $d\bar z = dx - i\,dy$

Operatory $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ są zdefiniowane następująco

$$df = dP + i\,dQ = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z.$$

Zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

a $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(P + iQ)\,dz + \frac{\partial}{\partial \bar z}(P + iQ)\,d\bar z,$$ gdzie $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ j.w.

Uwaga. f różniczkowalna w $z \in \mathcal{O}$ w sensie rzeczywistym jest różniczkowalna w z w sensie zespolonym wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 0$. Rzeczywiście

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{=0}$$

$\Leftrightarrow$ (P,Q) spełniają C.R.

Definicja $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ jeśli f ma pochodną zespoloną w każdym punkcie $z \in \mathcal{O}$.

Stwierdzenie

Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy $C^1(\mathcal{O})$ i niech $\alpha = f\,dz$. Wówczas f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy gdy $d\alpha = 0$.

Dowód

$$d\alpha = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right)}_{df} \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

zauważmy $d\bar{z} \wedge dz = (dx - i\,dy) \wedge (dx + i\,dy) = i\,dx \wedge dy - i\,dy \wedge dx$

$= 2i\,dx \wedge dy$.

Zatem $d\alpha = 0 \iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ∎.

Definicja. Zorientowanym łukiem $\Gamma \subset \mathbb{C}$ nazywamy dowolną (zwartą) 1-wymiarową zorientowaną rozmaitość z brzegiem. Jeśli $\Gamma \subset \mathcal{O}$ oraz $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ to całką z f po (zwartym) Γ nazywamy wartość całki $\int f\,dz$. Jeśli $D \subset \mathbb{C}$ jest 2 wymiarową rozmaitością z brzegiem $\partial D = \Gamma$ to Γ dziedziczy orientację z D. Całkę z f po Γ zorientowanej j.w. oznaczamy $\oint_\Gamma f\,dz$.

Całkę po Γ przeciwnie zorientowanej oznaczamy $\oint_\Gamma f\,dz$.

Przykład $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

$\partial D = \Gamma = C(0,1) \sqcup C(0,2)$. (okrąg, środek, promień)

$C(0,2) = \{2 \cdot e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$

$(-e_2, e_1) \sim (e_1, e_2)$ $C(0,1) = \{1 \cdot e^{-it} : t \in [0, 2\pi]\}$

$= \dfrac{\partial}{\partial z}(P + iQ)\,dz + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(P + iQ)\,d\bar{z}$, gdzie $\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ j.w.

Uwaga. f różniczkowalna w $z \in \mathcal{O}$ w sensie rzeczywistym jest różniczkowalna w z w sensie zespolonym wtedy i tylko wtedy gdy $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. Rzeczywiście

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{=0} + \frac{1}{2} i \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}_{=0}$$

$\left(\ldots = 0 \;\&\; \ldots = 0\right) \iff (P, Q)$ spełniają C.R.