dz, $d\bar{z}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ $\quad f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ $\quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

$dx + i\,dy$ $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $\quad f = P + iQ$

$\alpha = f\,dz$ $\quad d\alpha = df \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$

f - holomorficzna $\Leftrightarrow d\alpha = 0$. $\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (P, Q)$ - C.R.

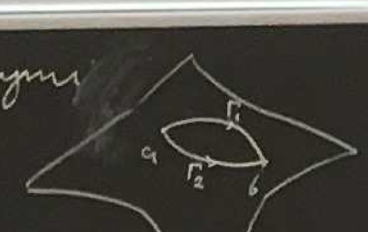
Uwaga. ① $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna $D \subset \mathcal{O}$ - zwarty obszar z brzegiem Γ to $\int f\,dz = 0$, gdyż $\int_\Gamma f\,dz = \int_D \underbrace{d(f\,dz)}_{=0} = 0$.

② Jeśli $\mathcal{O}$ jest obszarem gwiaździstym to z Lematu Poincaré istnieje funkcja $F: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ t. że

$dF = f\,dz$; zatem $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$. i F jest holomorficzna

$\overset{\shortparallel}{\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}$

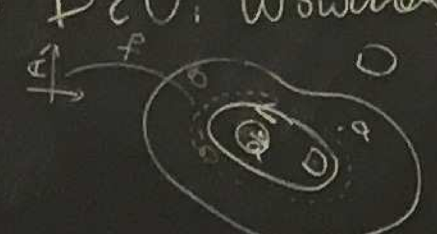
Jeśli $a, b \in \mathcal{O}$ oraz $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathcal{O}$ są zorientowanymi krzywymi których brzegiem $\{a, b\}$, to



$\int_{\Gamma_1} f\,dz = F(b) - F(a) = \int_{\Gamma} f\,dz \overset{\text{notacja}}{=\!=} \int_a^b f\,dz$.

Twierdzenie (Wzór Cauchy'ego).

Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną oraz $\Gamma \subset \mathcal{O}$ będzie brzegiem obszaru zwartego $D \subset \mathcal{O}$. Wówczas



$$\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \begin{cases} 0 & a \notin D \\ 2\pi i f(a) & a \in D \setminus \Gamma \end{cases}$$

Dowód Jeśli $a \notin D$ to $\frac{f(\xi)}{\xi - a}$ jest hol. na $\mathcal{O}' \supset D$ a zatem

$\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = 0$ na mocy Uwagi ①.

Jeśli $a \in D$, to $\forall \varepsilon > 0$ rozważmy $D_\varepsilon = D \setminus B(a, \varepsilon)$.

$\partial D_\varepsilon = \Gamma \sqcup C(a, \varepsilon)$

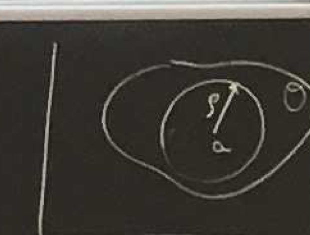
$\quad C(a, \varepsilon) = \{\underbrace{a + \varepsilon e^{+i\varphi}}_{\xi} : \varphi \in [0, 2\pi]\}$

Na mocy uwagi ① $0 = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi + \oint_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$.

$\oint_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon e^{i\varphi} \cdot i\,d\varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 2\pi i \cdot f(a)$ $\quad = - \oint_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$.

$\square$

Wniosek: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$, $\forall z \in D$, $\Gamma = \partial D$



Skoro

to $\frac{d}{dz} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$

Dalej zauważmy, że $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \oint_\Gamma \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} dz = 0$.

to $\frac{d}{dz} f$ jest holomorficzna oraz

$\frac{d^2}{dz^2} f(z) = \frac{1}{2\pi i} 2 \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$. Ogólnie funkcja $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorficzna ma pochodne zespolone wszystkich rzędów oraz

$$\overbrace{\frac{d^n}{dz^n} f(z)}^{f^{(n)}(z)} = \frac{1}{2\pi i} n! \oint_\Gamma \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (*).$$

Lemat. $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorficzna, $\varrho > 0$, $a \in \mathcal{O}$ są takie, że $B(a, \varrho) \subset \mathcal{O}$. Niech $M(a, \varrho) = \sup_{|\xi - a| = \varrho} |f(\xi)|$. Wówczas

$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!\,M(a, \varrho)}{\varrho^n}$ dla $z \in B(a, \varrho)$.

Dowód. Z (*) mamy $|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|\xi - a| = \varrho} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \xi = a + \varrho e^{i\varphi} \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$

$\leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(a + \varrho e^{i\varphi}) \varrho e^{i\varphi} i\,d\varphi}{\varrho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}} \right| \leqslant \frac{n!}{\cancel{2\pi}} \frac{M(a, \varrho)}{\varrho^n} \cdot \cancel{2\pi}$ $\square$

Definicja. Jeśli $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna to mówimy, że f jest całkowita.

Twierdzenie Liouville'a. Jeśli funkcja całkowita $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ograniczona to jest ona stała.

Dowód Niech $M = \sup_{\xi \in \mathbb{C}} |f(\xi)| < \infty$. Wówczas $\forall \varrho > 0$

$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{\varrho} \xrightarrow[\varrho \to \infty]{} 0$. Zatem $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ i $f = \text{const}$

Wniosek (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian $W \in \mathbb{C}[\cdot]$ stopnia większego niż zero ma pierwiastek. Dowód: Jeśli W nie ma pierwiastka to $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{1}{W(z)}$ spełnia zał. tw. Liouville'a. Zatem $W = \text{const}$ $\lightning$

Twierdzenie Morery.

Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą taką że całka $\int_\Gamma f(\xi)d\xi$ po krzywej łączącej punkty a, b nie zależy od wyboru tej krzywej. Wówczas istnieje funkcja $F: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorficzna taka, że $F' = f$. W szczególności f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$.

Dowód: Niech $a, z \in \mathcal{O}$ i niech Γ będzie krzywą łączącą a i z. Rozważmy funkcję $F(z) = \int_\Gamma f(\xi)d\xi \overset{\text{także}}{=} \int_a^z f(\xi)d\xi$

Zobaczmy, że F jest funkcją holomorficzną

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)d\xi - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\xi)-f(z))d\xi \right|$$

{ Krzywa łącząca z i $z+h$. $\xi = z + t \cdot h$ $t \in [0,1]$ }

$$= \left| \frac{1}{h}\int_0^1 (f(z+th)-f(z))h\,dt \right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(z+th)-f(z)| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Czyli F jest funkcją różniczkowalną w sensie zespolonym i $F'(z) = f(z)$. W szczeg. f jest funkcją holomorficzną.

Twierdzenie:

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem potęgowym $a_n \in \mathbb{C}$, r jest jego promieniem zbieżności. $\left(\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)$

Wówczas funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla $|z| < r$ jest holomorficzna.

Dowód: Korzystając z wyników An I, An II szeregi potęgowe można różniczkować wyraz po wyrazie w szczególności

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial \bar z} z^n = 0 \ \blacksquare$$