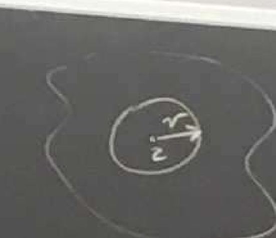
Wzór Cauchy'ego

$D \quad \Gamma = \partial D$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = f(z)$$



Wartości funkcji (hol.) f na brzegu D determinują wartości wewnątrz D.

Twierdzenie: $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ - hol., $r > 0$ t. że $B(z,r) \subset \mathcal{O}$. Wówczas
$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{vol} B(z,r)} \iint_{B(z,r)} f(x+iy)\,dx\,dy \qquad (\text{gdzie } \operatorname{vol} B(z,r) = \pi r^2)$$

Dowód: Wstawmy $\xi = z + \rho e^{i\varphi}$, $0 < \rho \le r$ do wzoru Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} i\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi \qquad 0 \le \rho \le r.$$

Stąd
$$\int_0^r \rho\,d\rho\, f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\varphi})\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$
$$\frac{r^2}{2} f(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{B(z,r)} f(x+iy)\,dx\,dy \qquad \boxtimes$$

Twierdzenie f, r - jak w poprzednim twierdzeniu. Jeśli $|f|$ ma w z maksimum lokalne to funkcja f jest stała na pewnym otoczeniu z.

Dowód:
$$|f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi$$

Z drugiej strony dla dostatecznie małego ρ mamy.
$$0 \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi\right) - |f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(|f(z+\rho e^{i\varphi})| - |f(z)|\right)}_{\le 0}\,d\varphi \le 0.$$

więc ≤ 0 & $\int \ldots = 0$.

a stąd $|f(z+\rho e^{i\varphi})| = |f(z)|$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ oraz ρ - dost. małego, $\boxed{\rho \le r_0}$

Czyli $|f|$ jest lokalnie stały. Jak pokazać, że f jest lokalnie stała?

$f(w) = C \cdot e^{i\varphi(w)}$ gdzie $\varphi : B(z, r_0) \to \mathbb{R}$, $w \in B(z, r_0)$

f spełnia war. C-R: $0 = \frac{\partial}{\partial \bar z} f(w) = C e^{i\varphi(w)} \frac{\partial}{\partial \bar z}\varphi(w) = C e^{i\varphi(w)} \cdot \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\varphi(w)$

a zatem $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(w) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(w) = 0$. Zatem $\varphi = \text{const}$ oraz $f = \text{const}$ na $B(z, r_0)$. $\boxtimes$

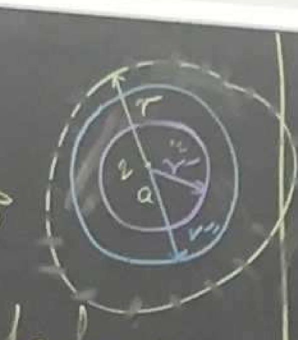
$$\underbrace{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}_{\substack{\text{zbieżne dla } z \in \mathbb{C} \\ \text{promień zbieżności } +\infty.}}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{- zbieżny dla } |z-1| < 1.$$

rozwinięcie $\frac{1}{z}$ wokół $z_0 = 1$, promień zbieżności $= 1$.

Twierdzenie

Niech $f: B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną



Wówczas $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ (*) i szereg ten jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny na $B(a,r)$.

Dowód Wystarczy wykorzystać zb. j.w. na $\overline{B(a,r')}$ gdzie $r'<r$.

Niech $r'<r''<r$. Sprawdźmy, że szereg (*) jest zbieżny jedn. na $B(a,r')$. Skoro $|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{(r'')^n} \cdot \underbrace{\sup_{\varphi\in[0,2\pi]} |f(a+r''e^{i\varphi})|}_{M(a,r'')}$ to

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\right| \underset{\text{dla } z\in B(a,r')}{\leqslant} M(a,r'')\left(\frac{r'}{r''}\right)^n$$

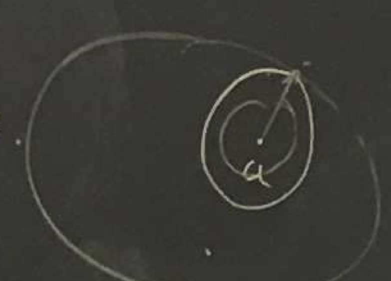
Skoro szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r''}\right)^n<\infty$ to na mocy kryt. Weierstrassa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}(z-a)^n$ jest zbieżny jedn. na $B(a,r')$ i bezwzględnie.

Równość w (*): $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-a|=r''}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = \left\{\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a-(z-a)}=\frac{1}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)}=\right.$

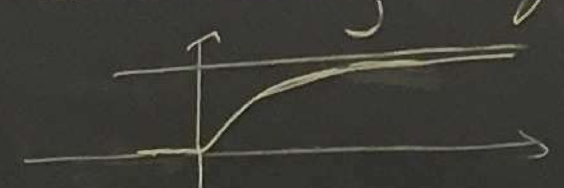
$$=\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-a|=r''}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-a|=r''}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi}_{\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad \blacksquare$$

← zbieżny jedn. w ξ

Uwaga (1) Jeśli $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ hol. oraz $r>0$ t. że $B(a,r)\subset\mathcal{O}$



to f ma w $B(a,r)$ rozwinięcie w szereg Taylora.



$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

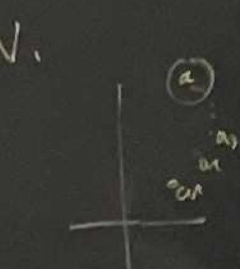
Rozważmy $g(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t>0 \\ 0 & t\leq 0\end{cases}$

$\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $g^{(n)}(0)=0$. ale nie jest stała na otoczeniu zera

Wniosek 1. Jeśli $f: \mathcal{O}\to\mathbb{C}$ jest taka, że $f^{(n)}(a)=0$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ oraz pewnego $a\in\mathcal{O}$ to istnieje $r>0$ t. że $f=\text{const.}$ na $B(a,r)$.

Wniosek 2 $f: \mathcal{O}\to\mathbb{C}$ - hol.

Jeśli $a_n, a\in\mathcal{O}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ i $f(a_n)=0$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$.



to istnieje $r>0$ t. że $f=0$ na $B(a,r)$.

Wystarczy pokazać, $f^{(n)}(a)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Niech $n_0=\min\{n\in\mathbb{N}: f^{(n)}(a)\neq 0\}$.

Wówczas $f(z)=\frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(z-a)^{n_0}+\ldots=(z-a)^{n_0}g(z)$ gdzie $g(z)=\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n_0}$.

Zauważmy, że $\boxed{g(a)=\frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}\neq 0}$. $\boxed{g(a_n)=\frac{f(a_n)}{(a_n-a)^{n_0}}=0}$ $\lim_{n\to\infty}g(a_n)=g(a)\neq 0$ ↯.