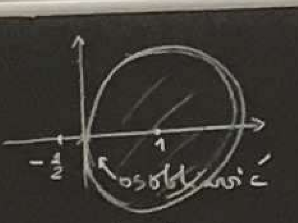
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$



Rozwinięcie $\frac{1}{z^2}$ wokół $a=1$.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\overbrace{(-1)^n}^{a_n}(z-1)^n$$

Promień zbieżności $\frac{1}{r}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=1$

$$-\frac{d}{dz}\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^n n}_{\tilde{a}_n}(z-1)^n$$

Funkcja wykładnicza $\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$

Funkcja logarytm:

Uwaga $\exp(z+2\pi i)=\exp(z)$.

Pierwsze podejście do log zespolonego.

$$\log u=\log|u|e^{i\arg u}=\log|u|+i\arg u$$

logarytm rzeczywisty

arg nie jest funkcją jednoznaczną.

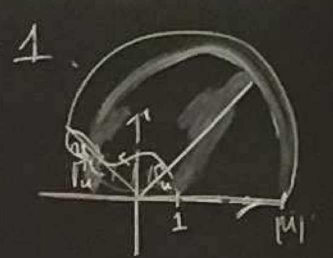
Zatem tak zdefiniowany log jest „funkcją wieloznaczną".

Gałąź główna funkcji log jest zdefiniowana warunkiem $\arg u\in\,]-\pi,\pi[$

Gdy $\log(u)=\log|u|+i\arg u$ jest holomorficzny?

Jeśli to podać rozwinięcie wokół $a=1$.

Rozważmy zbiór $\mathcal{O}=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\leq 0\}$



Zdefiniujmy funkcję

$\mathcal{O}\ni u\mapsto\int_{\Gamma_u}\frac{1}{z}\,dz\in\mathbb{C}$ gdzie Γ_u jest krzywą łączącą 1 z u. Zauważmy że $\int_{\Gamma_u}\frac{1}{z}\,dz$ nie zależy od wyboru $\Gamma_u\subset\mathcal{O}$. Zauważmy, że $\int_{\Gamma_u}\frac{1}{z}\,dz=\log|u|+i\arg u$, $\arg u\in\,]-\pi,\pi[$.

$$\int\frac{1}{z}\,dz=\int_1^{|u|}\frac{1}{t}\,dt+\int_0^{\arg u}\frac{\cancel{|u|e^{i\varphi}}\,i\,d\varphi}{\cancel{|u|e^{i\varphi}}}=\log|u|+i\arg u$$

Rozwinięcie log: $\frac{1}{u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(u-1)^n$ oraz $(\log u)'=\frac{1}{u}$

to $\log u=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}(u-1)^{n+1}$ i ponieważ $\log(1)=0$ to $a_0=0$.

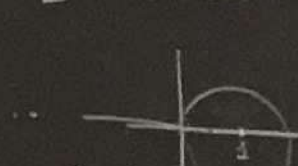
Mając zdefiniowany log (j.w.) definiujemy funkcję potęgową $a\in\mathbb{C}$: $\mathcal{O}=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\leq 0\}\ni u\mapsto u^a\in\mathbb{C}$ gdzie $u^a:=e^{a\log u}$. Podobnie:

$$\frac{d}{du}u^a=a u^{a-1}.$$

Uwaga: mając zdefiniowaną funkcję e^z, to dla ustalonego $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiujemy $a^z=e^{z\log a}$ $\quad\frac{d}{dz}a^z=\log a\cdot a^z$

Przykład Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $z^{\frac{1}{2}}$ wokół $a=1$

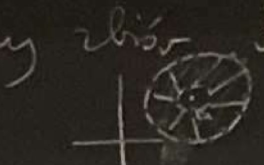
$$z^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{42}(z-1)^2+\ldots+\binom{\frac{1}{2}}{k}(z-1)^k+\ldots$$



promień zbieżności $r=1$. gdzie $\binom{q}{k}=\frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!}$ dla $q\in\mathbb{C}$.

Funkcja $e^{\frac{1}{z}}$ ma osobliwość w $z_0=0$. Wokół z_0 $e^{\frac{1}{z}}$ nie daje się rozwinąć w szereg Taylora. Zauważmy, że $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ – przykład rozwinięcia w szereg Laurenta.

Definicja Niech $0<r<R$ Pierścień o środku $a\in\mathbb{C}$ i promieniach r, R nazywamy zbiór $\mathcal{R}(a;r,R)=\{z: r<|z-a|<R\}$



Twierdzenie

Niech $f:\mathcal{R}(a;r,R)\to\mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wówczas f daje się przedstawić jako szereg postaci $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n(z-a)^n$ gdzie $b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$. Szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie.

wykażemy jedn. zbieżność + równość (*) na

$\{ z : r'' \leq |z-a| \leq R'' \}$.

szereg (*) nazywamy szeregiem Laurenta funkcji f

Mamy: $r < r' < r'' \leq R'' < R' < R$.

Z tw. Cauchy'ego $f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}}_{\mathrm{II}}$.

I $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \left\{ \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| \leq \frac{R''}{R'} < 1 \right\} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ – szereg zbieżny jednostajnie w ξ. (tw. Weierstrassa)

Zatem

$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=R'} \sum_{0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}}_{b_n}$ $\xi = R' e^{i\varphi}$

$|(z-a)^n b_n| \leq (R'')^n \max_{|\xi-a|=R'} |f(\xi)| \frac{R' \cdot 2\pi}{2\pi (R')^{n+1}} \leq \left(\frac{R''}{R'}\right)^n \cdot \max(\ldots)$

na mocy tw. Weierstrassa zbieżność jest jedn.

$\mathrm{II} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \left\{ \frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\xi-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \quad \left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| \leq \frac{r'}{r''} < 1 \right\}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi-a|=r'} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-a)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r''} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) = b_n \quad n < 0$

Tak jak dla I pokażemy, że szereg zbiega jednostajnie.

Zauważmy, że $b_n \overset{n>0}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$

$\oint_{|\xi-a|=R'} \ldots - \oint_{|\xi-a|=\rho} \ldots = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = 0$

$D = \{ z : \rho < |z-a| < R' \}$. ▨