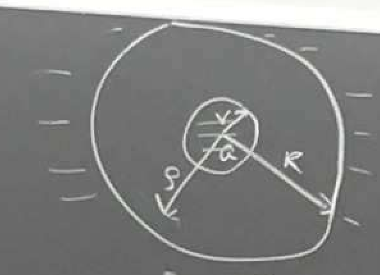
$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n (z-a)^n \qquad \mathcal{R}(a; r, R)$$



$f: \mathcal{R}(a, r, R) \to \mathbb{C}$ jest hol to

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = \varrho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

bezwzględnie niemal jednostajnie zbieżny na $\mathcal{R}(a;r,R)$

Twierdzenie Niech $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ gdzie $c_n \in \mathbb{C}$. Rozważmy $R = \left(\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$ $r = \limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{\frac{1}{n}}$. Wówczas szereg $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ jest bezwzględnie niemal jednostajnie zbieżny na $\mathcal{R}(a; r, R)$. Funkcja $\mathcal{R}(a;r,R) \ni z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n \in \mathbb{C}$ jest holomorficzna i jej rozwinięcie w szereg Laurenta ma postać $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$.

<u>Dowód:</u> Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ jest zbieżny gdy $\limsup_{n\to\infty} |c_n (z-a)^n|^{\frac{1}{n}} < 1$ czyli gdy $|z-a| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = R$ i zbieżność jest niemal jed na $B(a, R)$.

Podobnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ jest zbieżny gdy $\limsup_{n\to\infty} |c_{-n}(z-a)^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1$ czyli gdy $|z-a| > \limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{\frac{1}{n}}$.

Ponadto szereg $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie i można je różniczkować wyraz po wyrazie. W szczególności

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \bar z} c_n (z-a)^n = 0$$

i jeśli $r < R$ to $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ jest hol. na $\mathcal{R}(a, r, R)$.

Niech $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ będzie szeregiem Laurenta f.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=\varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=\varrho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(\xi-a)^k}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \oint_{|\xi-a|=\varrho} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{n+1-k}}$$

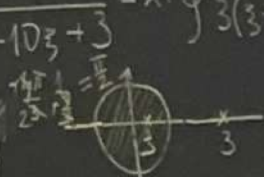
$$\left\{ \oint_{|\xi-a|=\varrho} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{n+1-k}} = \left\{ \begin{array}{l} \xi = \varrho e^{i\varphi} \\ d\xi = \varrho e^{i\varphi} i\, d\varphi \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho e^{i\varphi} i\, d\varphi}{\varrho^{n+1-k} e^{i(n+1-k)\varphi}} = \frac{i}{\varrho^{n-k}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-k)\varphi} d\varphi \right.$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 2\pi i & n = k. \end{cases} \Bigg\} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta_{n,k} \cdot 2\pi i = c_n$$

<u>Przykład</u>

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\ d\varphi = \frac{1}{i} e^{-i\varphi} d e^{i\varphi} \end{array} \right\} = \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\varphi} d e^{i\varphi}}{10 - 3e^{i\varphi} - 3e^{-i\varphi}} =$$

$$\left\{ e^{i\varphi} = \xi \right\} = \frac{2}{i} \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi\left(10 - 3\xi - 3\frac{1}{\xi}\right)} = 2i \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{3\xi^2 - 10\xi + 3} = 2i \oint \frac{d\xi}{3(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 3)}$$



$$\frac{2i}{3} \oint_{|\xi|=1} \frac{\frac{1}{\xi-3} d\xi}{(\xi - \frac{1}{3})} = \left\{ \begin{array}{l} f(\xi) = \frac{1}{\xi - 3} \\ a = \frac{1}{3} \end{array} \right\} = \frac{2i}{3} \oint_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - a} = \frac{2i}{3} 2\pi i\, f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{2 \cdot 3} = \frac{\pi}{2}$$

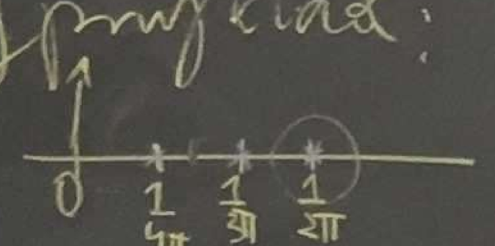
Definicja Jeśli $f: \mathcal{R}(a, 0, R) \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna to mówimy, że a jest izolowanym punktem osobliwym funkcji f.

Ogólniej, gdy $f: \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ jest hol. oraz $\mathcal{R}(a, 0, R) \subset \mathcal{O}$ to mówimy, że a jest izolowanym punktem osobliwym f.

Przykłady: • $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $a = 0$ - izolowany punkt osobliwy.

• $\frac{1}{3z^2 - 10z + 3}$ $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 3$ - izolowane punkty osobliwe

Antyprzykład: $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ f ma osobliwości gdy $z = 0$ lub $z = \frac{1}{k\pi}$



$z = 0$ nie jest izolowanym punktem osobliwym.

$z_k = \frac{1}{k\pi}$ są izolowanymi punktami osobliwymi.

Przykład $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $z = 0$ jest "osobliwością pozorną".

Definicja

Niech a będzie izolowanym punktem osobliwym f oraz $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ będzie szeregiem Laurenta f wokół a.

Mówimy, że

(1) a jest punktem regularnym (pozornie osobliwym) jeśli $b_n = 0$ dla $n < 0$.

(2) a jest biegunem rzędu $N > 0$ jeśli $b_{-N} \neq 0$ oraz $b_n = 0$ dla $n < -N$.

(3) a jest istotną osobliwością w pozostałych przypadkach.

Definicja. Niech a będzie izolowanym punktem osobliwym f. Wówczas współczynnik $b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = \rho} f(\xi)\, d\xi$ z szeregu Laurenta nazywamy rezyduum funkcji f w punkcie a i oznaczamy symbolem $\mathrm{Res}_a f$.

Stwierdzenie. Jeśli a jest biegunem rzędu k to

$$\mathrm{Res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z)$$

Dowód

$$f(z) = \underbrace{\frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z-a}}_{\text{część główna}} + \left(b_0 + b_1 (z-a)^1 + \ldots\right)$$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z) = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(b_{-k} + b_{-k+1}(z-a) + \ldots + b_{-1}(z-a)^{k-1} + (z-a)^k \left(\ldots \right) \right)$$

$$= b_{-1}(k-1)! + \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-a)^k \left(\ldots \right) \xrightarrow[z \to a]{} b_{-1}(k-1)!$$

Kartkówka Sprawdzić, że $\int_D dw = \int_{\partial D} w$ dla $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $w = x^3 dy - y^3 dx$