$f : R(a, 0, R) \to \mathbb{C}$ izolowana osobliwość f-kcji $f$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ $\quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$, $0<\rho<R$

Część główna szeregu Laurenta

$$f_-(z) = \sum_{n<\infty} b_n (z-a)^n$$

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{Res}_a(f)$$

Stwierdzenie

Jeśli $f$ jest ograniczona na $R(a;0,R)$ to $a$ jest pozorną osobliwością.

Dowód. $|b_{-n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta \right| = \left\{ \begin{matrix} \zeta = a+\rho e^{it} \\ t\in[0,2\pi] \end{matrix} \right\}$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})| \rho^{n}\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0<|z-a|<R} |f(z)|\, \rho^n \cdot 2\pi \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$

Stwierdzenie

Jeśli $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ wówczas $a$ jest biegunem rzędu $k$. (dla pewnego $k\in\mathbb{N}$)

Dowód. Skoro $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$ to $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ jest dobrze zdefiniowane wokół $a$ oraz $\lim_{z\to a} g(z) = 0$.

Rozwińmy funkcję $g$ w szereg Taylora. $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $c_k \neq 0$

gdzie $k>0$ (gdyż $g(a)=0$). Zatem $g(z) = (z-a)^k h(z)$ gdzie

$h(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k}$ w. analit. $h(a) = c_k \neq 0$.

Zatem $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}\frac{1}{h(z)}$ gdzie $\frac{1}{h(z)}$ jest hol. wokół $a$

i $a$ jest biegunem rzędu $k$.

Twierdzenie (Weierstrassa-Casoratiego)

Jeśli $a$ jest istotną osobliwością to $\forall c\in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ istnieje ciąg $a_n \to a$ t. że $f(a_n) \to c$.

Dowód: Dla $c=\infty$. Przypuśćmy, że żaden ciąg nie dąży $|f(a_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Wtedy $f$ - ograniczona wokół $a$ i z poprzedniego tw. $\Rightarrow a$ jest osobliwością pozorną.

Dalej $c\in\mathbb{C}$. Przypuśćmy, że żaden ciąg $(a_n)$ nie daje $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

Więc $c$ jest odległy od obrazu $f$.

Zdefiniujmy funkcję $g(z) = \frac{1}{f(z)-c}$. Funkcja jest ograniczona wokół $a$ i hol. na $R(a;0,R)$. Z poprzedniego tw jest ona hol. na $B(a,R')$. Rozwijamy $g$ w szereg Taylora:

$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n$. $f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$ ma w $a$ bieg. rzędu $k$ ↯.

$k\geq 0$

Zatem zachodzi teza tw. ☒

Twierdzenie (Całkowanie funkcji metodą residuów)

Niech $\Omega\subset\mathbb{C}$ będzie zbiorem otw. pł. zespolonej i niech $D\subset\Omega$ będzie obszarem zwartym z brzegiem $\partial D=\Gamma$.

Niech $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\subset \operatorname{Int} D$. Jeśli $f\in \underbrace{\mathcal{A}(\Omega\setminus\{z_1,\ldots,z_n\})}_{\text{funkcja hol na } \Omega\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}}$,

to $\oint_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_i}(f)$.

Dowód Niech $D_\varepsilon = D\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\varepsilon)$. Wówczas

$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta = \oint_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta - \sum_{i=1}^{n} \oint_{|\zeta-z_i|=\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta = \oint_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta - 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_i}(f) = 0$ ☒

Przykład:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ $\quad$ Rozważmy funkcję wymierną $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$

$z^4+1=0$ $\quad z\in\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}, e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}, \ldots\}$

Rozważmy $R>1$ i kontur $\Gamma_R =$ $-R$, $R$, $Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi]$.

$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{z^4+1} + 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{z^4+1}$

$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_0^\pi \frac{Re^{i\varphi} i\,d\varphi}{R^4e^{i4\varphi}+1} \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

$\left|\int_0^\pi \frac{R\,d\varphi}{(R^4e^{i4\varphi}+1)}\right| \leq \frac{R}{\frac{R^4}{2}}\pi = \frac{2\pi}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$|R^4e^{i4\varphi}+1| = R^4\left|1+\frac{e^{i\varphi}}{R^4}\right| > \frac{R^4}{2}$ dla dost. duży $R$

$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})}{z^4+1} = \frac{1}{(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{i\frac{3}{4}\pi})(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{i\frac{5}{4}\pi})(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{i\frac{7}{4}\pi})}$$

biegun $e^{\frac{i\pi}{4}}$ jest stopnia 1.

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{\underbrace{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})}\underbrace{(z-e^{i\frac{3}{4}\pi})(z-e^{i\frac{5}{4}\pi})(z-e^{i\frac{7}{4}\pi})}}$$

$$e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{i\frac{3}{4}\pi} = e^{\frac{i\pi}{2}}\frac{(e^{-\frac{i\pi}{4}}-e^{\frac{i\pi}{4}})}{2i}2i = i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)2i = \sin\frac{\pi}{4}$$

Przypomnienie : $a$ - biegun st. $k$ to $\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}}(z-a)^k f(z)$

Podobnie

$$\mathrm{Res}_{e^{i\frac{3}{4}\pi}}\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(e^{i\frac{3}{4}\pi}-e^{\frac{i\pi}{4}})(e^{i\frac{3}{4}\pi}-e^{i\frac{5}{4}\pi})(e^{i\frac{3}{4}\pi}-e^{i\frac{7}{4}\pi})}$$ ..... dokończyć do końca.

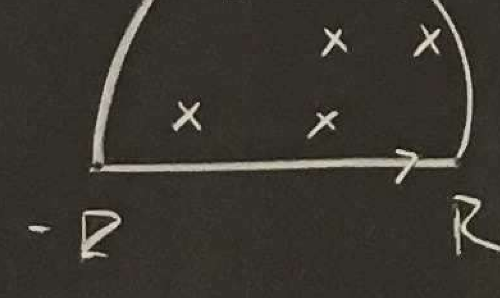
$$= \lim \frac{1}{z^4+1}(z-e^{\frac{3}{4}i\pi})$$

Ogólnie:

Jeśli $Q$ jest funkcją wymierną, która nie ma osob. rzeczywistych

oraz $\lim_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$ to $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0}\mathrm{Res}_z(f)$.

$\Gamma_R$




$$\oint_{\Gamma_R} Q(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} Q(x)\,dx + \int_0^{\pi} Q(Re^{i\varphi})\,R\,ie^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$\int_{-R}^{+R} Q(x)\,dx \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx, \qquad \int_0^{\pi} Q(Re^{i\varphi})\,R\,ie^{i\varphi}\,d\varphi \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

$$\oint_{\Gamma_R} Q(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0}\mathrm{Res}_z(f)$$