$V \otimes W \quad , \quad V^{**} = V$ notacje $v \in V$, $\theta \in V^*$

$\mathbb{R} \ni \theta(v) = v(\theta) = \langle \theta, v \rangle = \langle v, \theta \rangle$

Ustalmy V; $T^{(k,l)} V = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k\text{-razy}} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{l\text{-razy}}$

$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ - baza V

$\mathcal{E}^* = (e^1, \ldots, e^n)$ - baza sprzężona V^*

$e^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} := e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_l}$

$Q \in T^{(k,l)} V \qquad Q = \sum Q^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$ suma, suma, i.t.d. $=\!=\!=$ $Q^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$.

konwencja sumacyjna Einsteina

$\left(Q^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}\right)$ - będziemy nazywać współrzędnymi (k,l)-tensora Q w bazie $\mathcal{E}$.

Reguła transformacji (k,l)-tensorów.

Niech dodatkowo $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będzie drugą bazą V.

baza dualna $\tilde{\mathcal{E}}^* = (\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n)$

Macierz przejścia: $\tilde{e}_i = a^j_i e_j \qquad (a^j_i) \in M_n(\mathbb{R})$.

(Ko)Wektor we współrzędnych

$V \ni v \xmapsto{\Phi_{\mathcal{E}}} (\overset{v^1}{e^1(v)}, \ldots, \overset{v^n}{e^n(v)}) \in \mathbb{R}^n$. Podobnie definiuje $\Phi_{\tilde{\mathcal{E}}}$.

$\overset{\Phi_{\tilde{\mathcal{E}}}}{\longmapsto} (\overset{\tilde{v}^1}{\tilde{e}^1(v)}, \ldots, \overset{\tilde{v}^n}{\tilde{e}^n(v)}) \in \mathbb{R}^n$

Pytanie. Czym jest $\Phi_{\tilde{\mathcal{E}}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} = b$. W tym celu obliczmy macierz przejścia: $\tilde{e}^i = b^i_j e^j$.

$\delta^i_j = \langle \tilde{e}^i, \tilde{e}_j \rangle = \langle b^i_k e^k, a^l_j e_l \rangle = b^i_k a^l_j \delta^k_l = b^i_k a^k_j$.

Zatem $b = a^{-1}$, i dalej mamy

$\tilde{v}^i = \tilde{e}^i(v) = b^i_j e^j(v) = b^i_j v^j$

$(v^i) \longmapsto (b^i_j v^j)$.

Transformacje współrzędnych kowektorów.

$V^* \ni \theta \longmapsto (\overset{\theta_1}{e_1(\theta)}, \ldots, \overset{\theta_n}{e_n(\theta)}) \in \mathbb{R}^n$

$\downarrow a$

$\longmapsto (\underset{\tilde{\theta}_1}{\tilde{e}_1(\theta)}, \ldots, \underset{\tilde{\theta}_n}{\tilde{e}_n(\theta)}) \in \mathbb{R}^n$

$\tilde{e}_i(\theta) = a^j_i e_j(\theta) = a^j_i \theta_j$

Ogólniej jeśli $Q \in T^{(k,0)}V$ ma współrzędne $(Q^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k})$ to

$$\tilde{Q}^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = b^{j_1}_{j_{s_1}} \dots b^{j_l}_{j_{s_l}} a^{i_{r_1}}_{i_1} \dots a^{i_{r_k}}_{i_k} Q^{j_{s_1} \dots j_{s_l}}_{i_{r_1} \dots i_{r_k}}$$

+ konwencja sumacyjna Einsteina.

Dalej będziemy interesować się $(k,0)$-tensorami.

Niech $Q \in T^{(k,0)}V$ - k-liniowe odwzorowanie na $\mathbb{R}$.

Dalej niech $A : W \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym.

$(k,0)$-tensor na W zdefiniowany wzorem $(w_1, \dots, w_k) \longmapsto Q(Aw_1, \dots, Aw_k) \in \mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $A^*Q \in T^{(k,0)}W$ i nazywamy cofnięciem Q przez A. Zauważmy, że $A^* : T^{(k,0)}V \to T^{(k,0)}W$ jest liniowe.

$$Q \longmapsto A^*Q$$

Ponadto, jeśli $R \in T^{(m,0)}V$ i $S \in T^{(n,0)}V$ to

$$A^*(R \otimes S) \in T^{(m+n,0)}W \text{ i } A^*(R \otimes S) = A^*(R) \otimes A^*(S)$$

Niech $Q \in T^{(k,0)}V$ oraz $\rho \in S_k (= \mathrm{Perm}\{1, \dots, k\})$ to $(k,0)$-tensor dany wzorem $(v_1, \dots, v_k) \longmapsto Q(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)})$ oznaczamy $\rho \cdot Q \in T^{(k,0)}V$.

Stwierdzenie

$\forall \rho, \sigma \in S_k$ oraz $Q \in T^{(k,0)}V$ zachodzi $(\rho\sigma) \cdot Q = \rho(\sigma Q)$

Dowód Niech $v_1, \dots, v_k \in V$. Wówczas

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i = v_{\rho(i)} \\ \text{czyli } v_i = w_{\rho^{-1}(i)} \end{array} \right\}$$

$$\rho(\sigma \cdot Q)(v_1, \dots, v_k) = (\sigma \cdot Q)(\overset{w_1}{v_{\rho(1)}}, \dots, \overset{w_k}{v_{\rho(k)}})$$

$$= Q(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(k)}) = Q(v_{\rho\sigma(1)}, \dots, v_{\rho\sigma(k)}) = ((\rho\sigma) Q)(v_1, \dots, v_k)$$

$w_{\rho^{-1}(\rho\sigma(1))}$ itd...

$\shortparallel$

$v_{\rho\sigma(1)} \dots v_{\rho\sigma(k)}$

Definicja Mówimy, że $Q \in T^{(k,0)}V$ jest k-formą alternującą jeśli $\rho \cdot Q = \mathrm{sgn}(\rho) \cdot Q$ dla wszystkich $\rho \in S_k$.

Przestrzeń k-form alternujących oznaczamy $\Lambda^k V$

Pytanie $\dim \Lambda^k V = ?$. Przypomnijmy, że $\dim T^{(k,0)}V = (\dim V)^k$

Definicja Niech $Q \in T^{(k,0)}V$. Wówczas k-formę alternującą daną wzorem

$$\frac{1}{k!} \sum_{\rho \in S_k} \mathrm{sgn}(\rho) \rho \cdot Q$$

oznaczam symbolem $\mathrm{Alt}(Q)$.

Uwaga

$$\sigma \cdot \mathrm{Alt}(Q) = \frac{1}{k!} \sum_{\rho} \mathrm{sgn}(\rho)\, \sigma \cdot \rho \cdot Q = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \frac{1}{k!} \sum_{\rho} \mathrm{sgn}(\sigma\rho)\, \sigma \cdot \rho \cdot Q = \mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{Alt}(Q)$$

Zauważmy też, że jeśli $Q \in \Lambda^k V$ to $Alt(Q) = Q$.

$$Alt(Q) = \frac{1}{k!}\sum_{\varrho} sgn(\varrho)\underbrace{\varrho\cdot Q}_{sgn\,\varrho\cdot Q} = \frac{1}{k!}\cdot\sum_{\varrho\in S_k}\underbrace{sgn(\varrho)^2}_{=1} Q = Q.$$

W szczególności $Alt(Alt(Q)) = Alt(Q)$.

Twierdzenie:

Jeśli $S \in T^{(k,0)}V$ oraz $R \in T^{(l,0)}V$ i $Alt(S) = 0$ to $Alt(S\otimes R) = 0$.

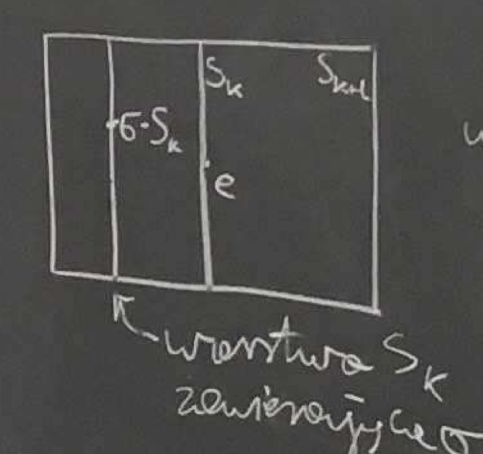
Dowód: Niech $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l} \in V$.

$$Alt(S\otimes R)(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l}) =$$

$$\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\varrho\in S_{k+l}} sgn\,\varrho\cdot S(v_{\varrho(1)},\dots,v_{\varrho(k)})\cdot R(v_{\varrho(k+1)},\dots,v_{\varrho(k+l)}) =$$

$S_k \subset S_{k+l}$

$\varrho\in S_k \Leftrightarrow \varrho(k+i) = k+i$ dla $i=1,\dots,l$



wystarczy pokazać, że wkład z każdej warstwy jest zero

Suma po $\varrho\in S_k\subset S_{k+l}$:

$$\sum_{\substack{\varrho\in S_k\\ \cap\\ S_{k+l}}} sgn\,\varrho\; S(v_{\varrho(1)},\dots,v_{\varrho(k)})\, R(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

WKŁAD OD S_k jest zerowy.

$$\underbrace{k!\,Alt(S)(v_1,\dots,v_k)}_{=0} R(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

Dalej wkład do sumy od $\sigma\cdot S_k$

$$\sum_{\substack{\pi\in\sigma\cdot S_k\\ \Updownarrow\\ \pi=\sigma\cdot\varrho\\ \varrho\in S_k}} sgn(\sigma\cdot\varrho)\, S(v_{\sigma\varrho(1)},\dots,v_{\sigma\varrho(k)})\, \underbrace{R(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})}$$

Wkład od $\sigma\cdot S_k$ jest zerowy $\forall\sigma\in S_{k+l}$.

$$k!\,sgn\,\sigma\, Alt(S)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = 0.$$

Zatem $Alt(S\otimes R) = 0$