$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$ – całka zbieżna gdy $\operatorname{Re} z>0$

$$t^{z-1}=e^{(z-1)\log t} \Rightarrow |t^{z-1}|=e^{(\operatorname{Re} z-1)\log t}=t^{\operatorname{Re} z-1}$$

$$= \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Holomorficzność funkcji Γ. Musimy sprawdzić, że $\frac{\partial}{\partial \bar z}\Gamma(z)=0$

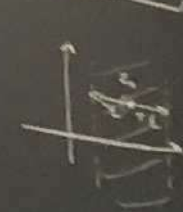
Czy $\frac{\partial}{\partial \bar z}\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \overset{!}{=} \int_0^\infty e^{-t}\frac{\partial}{\partial \bar z}t^{z-1}\,dt=0.$

Kryterium Weierstrassa: $\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$

$$e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}t^{z-1}=e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}\underline{t^{x-1}}\,t^{iy}=e^{-t}\log t\cdot t^{x-1}\,t^{iy}=\underline{e^{-t}\log t\, t^{z-1}}$$

Ustalmy $z_0\in\mathbb{C}$ i badajmy różniczkowalność w z_0.

$$|e^{-t}\log t\; t^{z-1}| \le \begin{cases} e^{-t}|\log t|\,t^{\operatorname{Re} z_0-\varepsilon-1} & 0\le t\le 1\\ e^{-t}|\log t|\cdot t^{\operatorname{Re} z_0+\varepsilon-1} & 1\le t<\infty\end{cases}$$



dla wszystkich z: $|\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0|<\varepsilon$

Na mocy kryt. Weierstrassa można różniczkować po parametrze pod całką.
Podobnie wskazujemy majorantę dla $\frac{\partial}{\partial y}$. Zatem $\frac{\partial}{\partial \bar z}\Gamma(z)=0$.
i funkcja Γ jest holomorficzna na $\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z>0\}$.

Stwierdzenie

- $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ dla $\operatorname{Re} z>0$.
- $\Gamma(n+1)=n!$

Dowód. • $\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z\,dt \overset{\text{całk.}}{\underset{\text{przez części}}{=}} \cancel{-e^{-t}t^z\Big|_0^\infty}+\int_0^\infty e^{-t}\underbrace{\frac{d}{dt}t^z}_{=zt^{z-1}}\,dt=$

$$=z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt=z\Gamma(z).$$

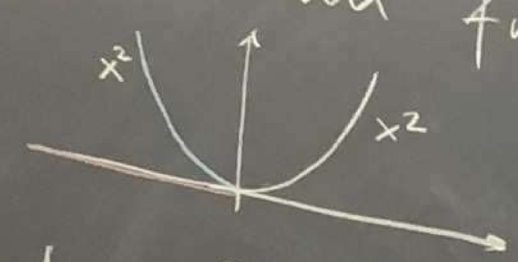
•• $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1$ $\quad$ i $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n(n-1)\cdots 2\Gamma(1)=n!$

Rozszerzamy funkcję Γ "w lewo". Na przykład dla $\operatorname{Re} z>-1$
definiujemy $\Gamma_{ext}(z)$ wzorem $\Gamma_{ext}(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ dla $z\neq 0$

Zauważmy, że dla $\operatorname{Re} z>0$ $\Gamma_{ext}(z)=\Gamma(z)$
Ogólnie dla $z\in\{\operatorname{Re} z>-n\}\setminus\{-n+1,-n+2,\ldots,0\}$.
definiujemy $\Gamma_{ext}(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$.
Motywacją definicji Γ_{ext} jest własność $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$,
która przy naszej definicji Γ_{ext} zachodzi też dla Γ_{ext}.
Ostatecznie funkcja Γ rozszerza się do $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$
i będzie oznaczana symbolem $\Gamma: \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\to\mathbb{C}$ jest
holomorficzna.

Ogólnie o rozszerzaniu funkcji holomorficznych.

Antyprzykład



1.

Definicja Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ będzie podzbiorem otwartym. Mówimy, że $\mathcal{O}$ jest niespójny jeśli istnieją zbiory otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{C}$ niepuste t. że $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ oraz $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. $\mathcal{O}$ jest spójny jeśli nie jest niespójny.

Twierdzenie Jeśli $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem spójnym, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzne na $\mathcal{O}$ oraz $\exists\, a \in \mathcal{O}$ t. że $f^{(n)}(a) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wówczas $f \equiv 0$ na $\mathcal{O}$.

Dowód $\mathcal{O}_1 = \{z \in \mathcal{O} : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Zbiór $\mathcal{O}_1$ jest niepusty bo $a \in \mathcal{O}_1$.

— " — " — otwarty: niech $b \in \mathcal{O}_1$, wówczas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(b)}{n!}}_{0} (z-b)^n$ i $f(z) = 0$ na $|z-b| < r$. Zatem $\mathcal{O}_1 \supset \{|z-b| < r\}$

$|z-b| < \underset{\text{promień}}{r}$

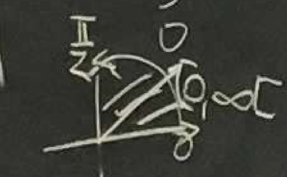
$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_1 = \{z \in \mathcal{O} : \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |f^{(k)}(z)| > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{O}_k$ gdzie $\mathcal{O}_k = \{z \in \mathcal{O} : |f^{(k)}(z)| > 0\}$ są zbiorami otwartymi. Więc $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$ a zatem $f \equiv 0$ na $\mathcal{O}$. $\boxtimes$

Wniosek: $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ - spójny, $f, g : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ są holomorficzne oraz $\exists\, a \in \mathcal{O}$ & $\varepsilon > 0$ t. że $f(z) = g(z)$ dla $|z-a| < \varepsilon$ to $f(z) = g(z)$ dla $z \in \mathcal{O}$.

Twierdzenie.

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt \quad \text{dla } \operatorname{Re}(u), \operatorname{Re}(v) > 0.$$

Dowód: $\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} t = s^2 \\ dt = 2s\,ds \\ s \in [0, \infty[\end{array} \right\} = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2u-1}\,ds$



$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \cdot \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2u-1}\,ds \int_0^\infty e^{-p^2} p^{2v-1}\,dp =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} p^2 + s^2 = r^2 \\ p = r\cos\varphi \\ s = r\sin\varphi \\ dp\,ds = r\,dr\,d\varphi \end{array} \right\} = \underbrace{2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u-1} r^{2v-1} r\,dr}_{\Gamma(u+v)} \ \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\varphi))^{2u-1} (\cos\varphi)^{2v-1}\,d\varphi}_{\substack{t = (\sin(\varphi))^2 \\ t \in [0,1] \\ dt = 2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}}.$$

$$= \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt.$$

Twierdzenie $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Dowód $\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 t^{z}(1-t)^{-z}\,dt$

Wniosek. $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – spójny, $f, g : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ są holomorficzne oraz $\exists\, a \in \mathcal{O}$ & $\varepsilon > 0$ t. że $f(z) = g(z)$ dla $|z-a| < \varepsilon$ to $f(z) = g(z)$ dla $z \in \mathcal{O}$.

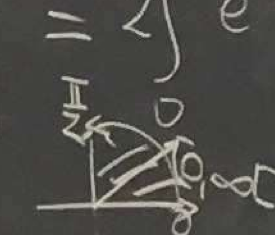
Twierdzenie.

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt \quad \text{dla } Re(u), Re(v) > 0.$$

Dowód:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1}\,dt = \left\{\begin{array}{l} t = s^2 \\ dt = 2s\,ds \\ s \in [0,\infty[\end{array}\right\} = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2u-1}\,ds$$

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \cdot \int_0^\infty e^{-s^2} s^{2u-1}\,ds \int_0^\infty e^{-p^2} p^{2v-1}\,dp =$$



$$= \left\{\begin{array}{l} p^2+s^2 = r^2 \\ p = r\cos\varphi \\ s = r\sin\varphi \\ dp\,ds = r\,dr\,d\varphi \end{array}\right\} = \underbrace{2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u-1} r^{2v-1} r\,dr}_{\Gamma(u+v)} \; \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\varphi))^{2u-1} (\cos\varphi)^{2v-1}\,d\varphi}_{\substack{t = (\sin(\varphi))^2 \\ t \in [0,1] \\ dt = 2\cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi}}.$$

$$= \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt.$$

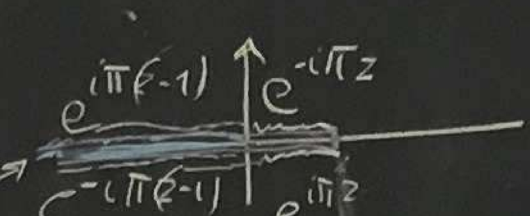
Twierdzenie $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Dowód

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt$$

Rozważmy funkcję $\zeta \longmapsto \zeta^{z-1}(\zeta-1)^{-z}$

gdzie ζ^{z-1} jest funkcją określoną na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ wzorem $e^{(z-1)\log \zeta}$. Podobnie $(\zeta-1)^{-z}$ jest określona na $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$. Rys



Konkluzja funkcja $\zeta^{z-1}(\zeta-1)^{-z}$ jest jednoznaczna $\mathbb{C} \setminus [0,1]$

1. $\Gamma =$

$$I = \oint_\Gamma \zeta^{z-1}(\zeta-1)^{-z}\,d\zeta = -2\pi i \cdot Res_\infty\, \zeta^{z-1}(\zeta-1)^{-z}$$

$$= +2\pi i\, Res_0 \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{z-1}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)^{-z} = 2\pi i \cdot Res_0 \frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{z-1}\frac{(-\zeta+1)^{z}}{\zeta^{-z}} =$$

$$= 2\pi i\, Res_0 \frac{1}{\zeta}(-\zeta+1)^{-z} = 2\pi i$$

Z drugiej strony $I = e^{+i\pi z}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} - e^{-i\pi z}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} \Rightarrow$

$$2\pi i = \left(e^{+i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt}_{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$