TEORIA DYSTRYBUCJI

Definicja

Deltę Diraca nazywamy funkcję $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$, b) ~~$f(x)$~~ $\delta(x)$ - różniczkowalna

c) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)\,dx = g(0)$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ciągła

d) Funkcja schodkowa $\Theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Okazuje się, że $\Theta'(x) = \delta(x)$

To nie ma sensu ściśle mówiąc, Θ nie jest różniczkowalna w 0, $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)\,dx$ powinna być równa 0 ponieważ $g(x)\delta(x) = 0$ prawie wszędzie $\delta(x)$ nie jest różniczkowalna w 0, i t.d.

Schwarz uogólnił funkcje

$$f(x) \longrightarrow T_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

g - funkcja ciągła dla której całka istnieje, i ma dobre właściwości

(f całkowalna)

Definicja:

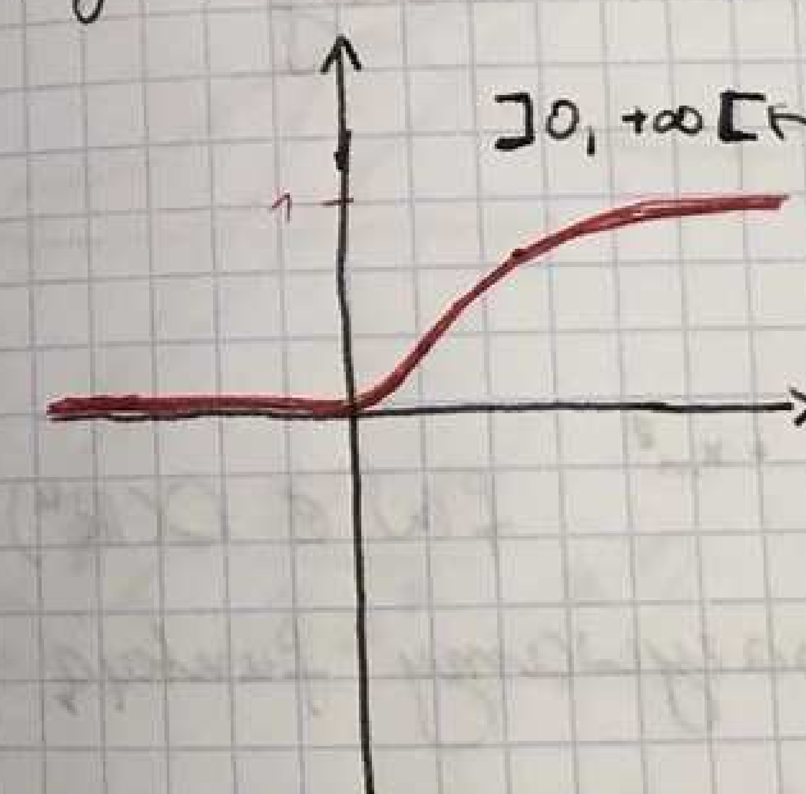
Nośnikiem funkcji ~~nazywamy~~ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywamy zbiór

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

dopełnienie punkty skupienia zbioru.

Przykład

Weźmy funkcję $\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$]0, +\infty[$ tu funkcja jest niezerowa

$$\text{supp}\ \psi(t) = \overline{]0, \infty[} = [0, +\infty[$$

~~supp~~ $\psi(1-t)$ nie zeruje się gdy $1-t > 0$ $\quad t < 1$

$$\text{supp}\ \psi(1-t) = \overline{]-\infty, 1[} =]-\infty, 1]$$

$\psi(t)\,\psi(1-t) = \varphi(t)$

$]0, \infty[\quad]-\infty, 1[$

$\varphi(t)$ nie zeruje się w $]0,1[$

$\operatorname{supp} \varphi(t) = \overline{]0,1[} = [0,1]$

Ψ - funkcja gładka

Def: supp f jest zwarty $\Rightarrow$ mówi się że f ma zwarty nośnik

Definicja

Przestrzenią funkcji próbnych nazywamy zbiór

$$D(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \operatorname{supp} f \begin{array}{l} - \text{zwarty nośnik} \\ f\text{-gładka} \end{array} \right\}$$

Elementy $D(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcjami próbnymi

Przykład

- $\varphi(t)$ - gładka i ma nośnik zwarty
$\Rightarrow \varphi(t) \in D(\mathbb{R})$

- $\psi(t) \notin D(\mathbb{R})$

- $f(x) = \exp(-\|x\|^2) = e^{-x_1^2 + \ldots + x_n^2} \qquad f(x) \notin D(\mathbb{R}^n)$

$x \in \mathbb{R}^n$, $x \in (x_1, \ldots, x_n)$ $f(x)$ nazywamy funkcją Gaussa

Notacja

$\mathbb{R}^n \ni x \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$

Wielowskaźnik $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$

$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1$ - rząd wielowskaźnika

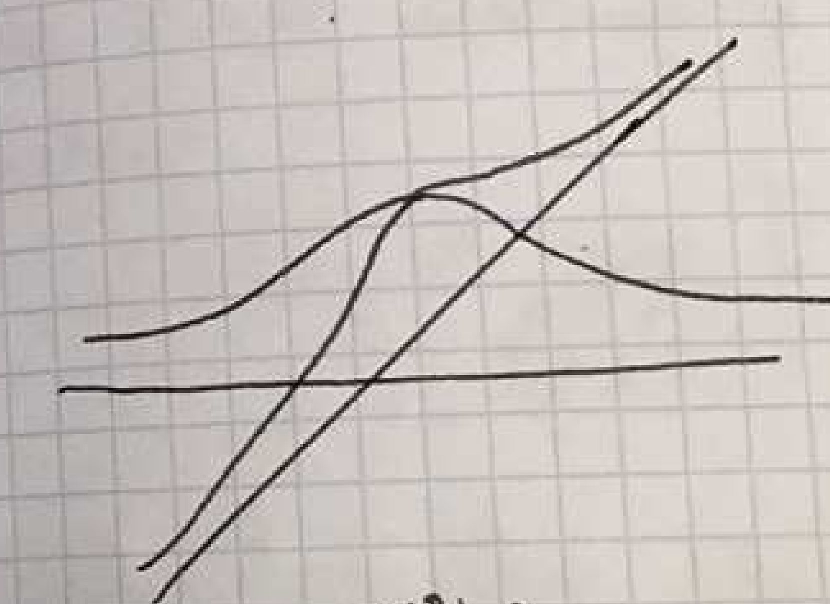
$$\frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \circ \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = (1,2) & |\alpha| = 3 \\ \dfrac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x^\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \end{array} \right\}$$

Definicja

Przestrzenią Schwartza nazywamy zbiór

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \begin{array}{l} f\text{ - gładka} \\ \sup\limits_{\substack{\text{dowolne } \alpha, \beta \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| x^\alpha \dfrac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta}(x) \right| < \infty \end{array} \right\}$$



- dąży do zera szybciej niż wielomiany

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta} = 0$$

Przykład

$$f(x) = e^{-\|x\|^2}$$

$$\frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta} = p(x) e^{-\|x\|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{-x_1^2} = -2x_1 e^{-x_1^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1} e^{-x_1^2} = -2e^{-x_1^2} - 2x_1(-2x_1)e^{-x_1^2}$$

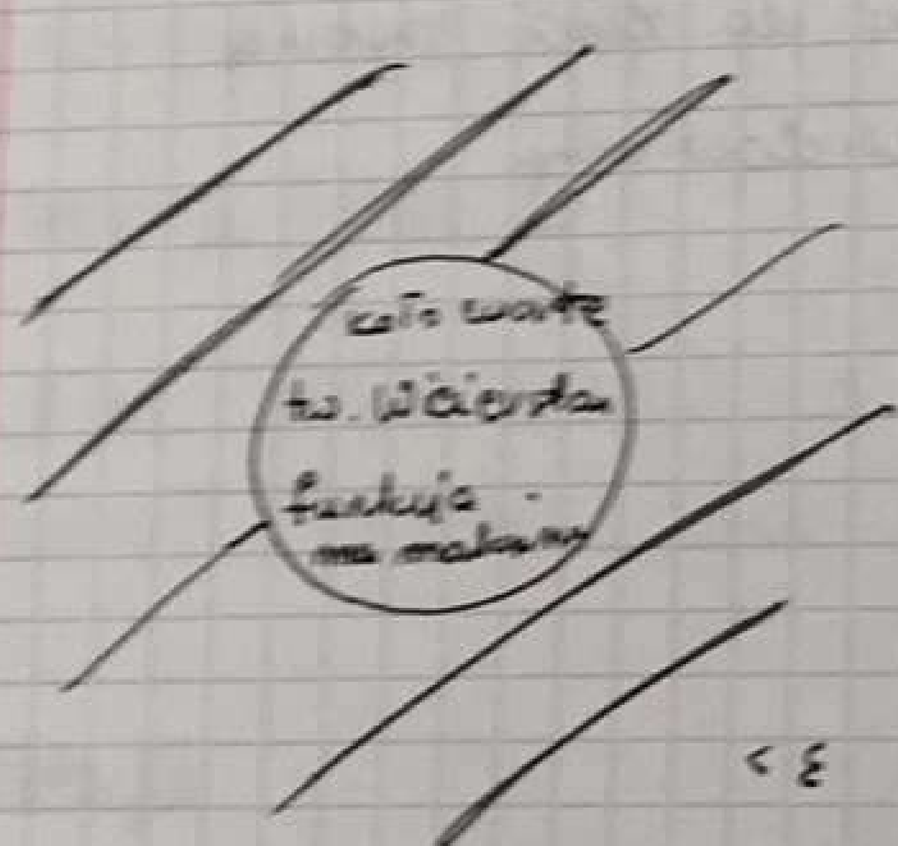
$$= (4x_1^2 - 2) e^{-x_1^2}$$

wielomian

$$x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\alpha} = P_{\alpha,\beta}(x) e^{-\|x\|^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} P_{\alpha,\beta}(x) e^{-\|x\|^2} = 0$$

0 (szybko)



$$x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta} \text{ jest ograniczona} \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta} \right| < \infty$$

$$\Rightarrow e^{-\|x\|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$$

Definicja
Funkcje przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcjami Schwarza

Definicja

Dla $k, l \in \mathbb{N}$ definiujemy $\|\cdot\|_{k,l} : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \le k \\ |\beta| \le l}} \left| x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|} f}{\delta x^\beta} \right|$$

Mówimy, że ciąg $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ dąży do zera tj. $f_m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ kiedy $\forall_{k,l \in \mathbb{N}}, \|f_m\|_{k,l} \xrightarrow{k,l} 0$

Definicja
Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy $\|\cdot\|_k : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ postaci

$$\|f\|_k = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\beta| \le k}} \left| \frac{\delta^{|\beta|} f(x)}{\delta x^\beta} \right|$$

Mówimy, że ciąg $(f_m) \subset D(\mathbb{R}^n)$ dąży do 0 kiedy

$$\begin{cases} \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ zwarty}, \ supp(f_m) \subset K \\ \text{dla każdego } k \in \mathbb{N} \ \|f_m\|_k \xrightarrow{n \to \infty} 0 \end{cases}$$

Uwaga

1) $D(\mathbb{R}^n)$ i $S(\mathbb{R}^n)$ nie są przestrzeniami Banacha

2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n)$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$g \in C(\mathbb{R}^n)$ $\int_R f_n(x) g(x) dx =$

$\{ \exists K \subset \mathbb{R}^n : \forall n\in\mathbb{N}, \text{supp}(f_n) \subset K. \}$

$= \int_K f_n(x) g(x) dx = \{ \left| \int_K f_n(x) g(x) dx \right| \leq \int_K |f_n(x)||g(x)| \}$

$\{ \|f_n\|_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \frac{\delta^0 f}{\delta x^0} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|^k \}$

$\leq \int_K \underbrace{\|f_n\|_0}_{\to 0} \underbrace{|g(x)|}_{\to 0} dx = 0$

Uwaga

$D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$

zwarty nośnik φ $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|}\varphi}{\delta x^\beta} \right| < \infty$

Stwierdzenie

Przestrzenie $D(\mathbb{R}^n)$ oraz $S(\mathbb{R}^n)$ są przestrzeniami wektorowymi oraz dodawanie i mnożenie funkcji tych przestrzeni ~~[illegible]~~ są operacjami ciągłymi. Właściwość tą mają również operacje

$S(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow x_i \cdot f \in S(\mathbb{R}^n)$

$S(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow \frac{\delta f}{\delta x_i} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dowód

$D(\mathbb{R}^n)$ i $S(\mathbb{R}^n)$ są trywialnie przestrzeniami wektorowymi

Widać, też $S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in S(\mathbb{R}^n)$

$S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \longrightarrow f + g \in S(\mathbb{R}^n)$

są operacjami ciągłymi.

$D(\mathbb{R}^n) \times D(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \longmapsto f+g \in D(\mathbb{R}^n)$

$D(\mathbb{R}^n) \times D(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \longrightarrow fg \in D(\mathbb{R}^n)$

są odwzorowaniami ciągłymi,

aby pokazać, że odwzorowanie $f \in S(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{T} x^i f \in S(\mathbb{R})$ jest ciągłe, wystarczy zobaczyć, że jest liniowe i wtedy wystarczy sprawdzić, że jest ciągłe w zerze. z tego wynika że jest ciągłe wszędzie

$\lim_{f_n\to 0} T(f_n) = T(0) = 0 \leftarrow$ trzeba to sprawdzić.

$T(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, gdy $\|F(f_n)\|_{k,l} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\|T(f_n)\|_{k,l} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\le k \\ |\beta|\le l}} \left| x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}(x_i f_n) \right|$$

wielomian z pochodnymi x_i oraz f_n

•

$= C_{i,k,l} \, \|f_n\|_{k+1,l}$, zatem $\|T(f_n)\|_{k,l} \to 0$

Podobnie można zrobić dla $S(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in S(\mathbb{R}^n)$

□

Definicja.

Dystrybucją nazywamy odwzorowanie liniowe i ciągłe $D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$. Innymi słowy $T : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

a) $T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$

b) $f_n \longrightarrow 0$, $T(f_n) \longrightarrow 0$

Przykład

$f \in C(\mathbb{R}^n)$

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx$$

$\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

T_f jest ciągła

Definicja

Zbiór $D(\mathbb{R}^n)$ to zbiór dystrybucji, $T_f \in D(\mathbb{R}^n)$

Dystrybucję postaci T_f nazywamy dystrybucją regularną

11.01.2019

Przykład:

$f(x) = \log|x|$, możemy zdefiniować dystrybucję postaci

$T_{\log|x|} : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$T_{\log|x|}(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \, \varphi(x) \, dx =$$

$$= \left\{ \int \log|x| \, dx = x(\log|x|-1) + C \right\} = \cancelto{0}{x(\log|x|-1)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} x(\log|x|-1)\varphi'(x) \, dx$$

bo f. próbna

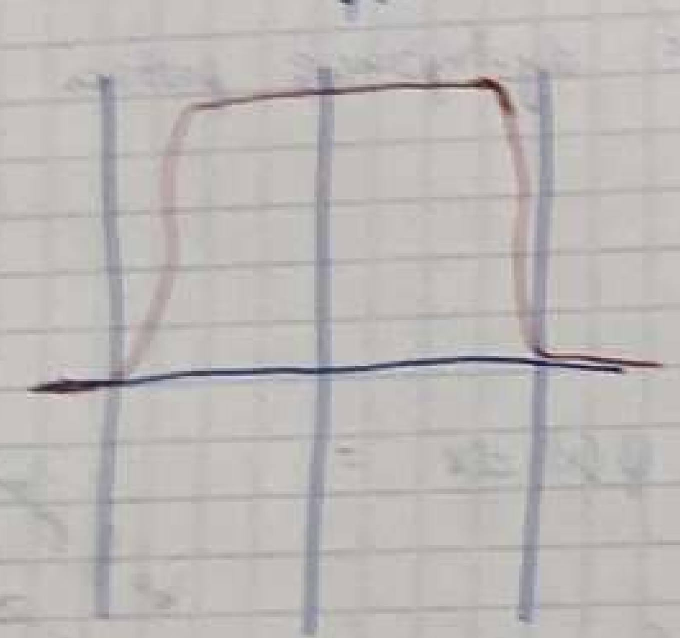
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x(\log|x|-1)\varphi'(x) \, dx$$

Przykład 2

Wartość główna funkcji $1/x$

$$V.p.\left(\tfrac{1}{x}\right) : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi(x) \longmapsto V.p\left(\tfrac{1}{x}\right)(\varphi(x))$$

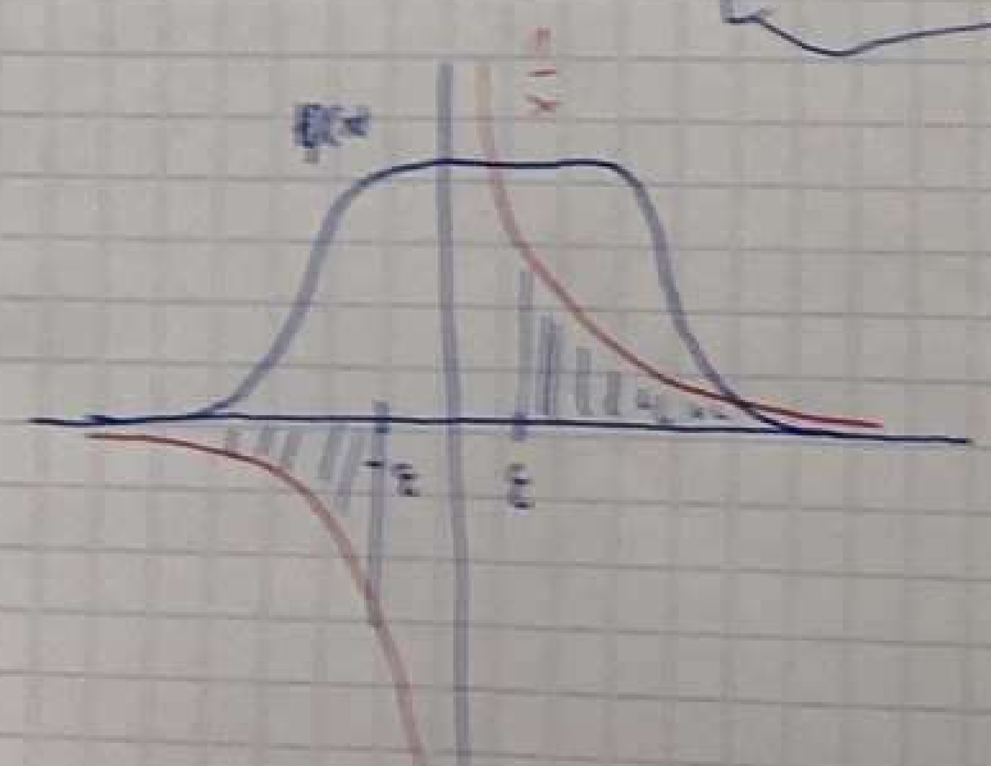
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$$



$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ istnieje, jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx$ istnieje.

nie zbieżna

$$V.p\left(\tfrac{1}{x}\right) \varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]}_{0 \ \forall \varepsilon} = 0$$



Operacje na dystrybucjach

Niech $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ oraz $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wtedy możemy zdefiniować odwzorowanie

$$(f \cdot T)(\varphi(x)) = T[f \varphi(x)]$$

$\in D(\mathbb{R})$ $\quad \varphi \in D(\mathbb{R})$ - gładka - zwarty nośnik

$f \cdot \varphi$ - gładka

$\varphi(x) = 0 \Rightarrow f\varphi(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} f\varphi(x) \subset \operatorname{supp} \varphi(x)$

Skoro $\operatorname{supp} f\varphi(x)$ jest ograniczone to jest podzbiorem $\operatorname{supp} \varphi(x)$ i jest domknięty z definicji $\Rightarrow \operatorname{supp} f\varphi(x)$ jest zwarty

$$f \cdot T : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Przykład: $\delta : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$
$$\varphi \longmapsto \varphi(0)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

Chcemy zobaczyć co to jest $[\cos(x) \cdot \delta]$.

$$[\cos(x)\, \delta]\, \varphi(x) = \delta[\cos(x) \cdot \varphi(x)] = \overbrace{\cos(0)}^{1} \varphi(0) =$$
$$= \varphi(0) = \delta(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow \cos(x)\, \delta = \delta.$$

Przykład

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, f_2 - lokalnie całkowalna

$$T_{f_2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Co to jest $(f_1 T_{f_2})(\varphi(x)) =$

$$= T_{f_2}(f_1 \cdot \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) f_1(x) \varphi(x)\,dx$$

$f_2(x) f_1(x)$ jest lokalnie całkowalna

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) f_1(x) \varphi(x)\,dx = T_{f_2(x) f_1(x)}[\varphi(x)] \quad \forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R})$$

$$f_1 \cdot T_{f_2} = T_{f_1 f_2}$$

Widać, że tak samo można zrobić

dla $f_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ lokalnie całkowalna

i dla f_1 - gładka.

Pochodna dystrybucji

Def: Niech $T \in D(\mathbb{R}^m)$. Wtedy definiujemy $\frac{\delta T}{\delta x^i} \in D(\mathbb{R}^m)$

jako

$$\frac{\delta T}{\delta x^i}(\varphi(x)) = T\left(-\frac{\delta \varphi}{\delta x^i}(x)\right)$$

Przykład

$$\delta : D(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(0)$$

$$\frac{\delta \delta}{\delta x^i}(\varphi(x)) = \delta\left(-\frac{\delta \varphi}{\delta x^i}(x)\right) = -\frac{\delta \varphi}{\delta x^i}(0)$$

Przykład

funkcja schodkowa

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{lokalnie całkowalna}$$

$$T_\Theta \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$$

$$T'_\Theta(\varphi(x)) = -T_\Theta(\varphi'(x)) = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx$$

$$= -(\cancel{\varphi(\infty)} - \varphi(0)) = \varphi(0) = \delta(\varphi(x))$$

Twierdzenie

Jeżeli f jest funkcją gładką to zachodzi

$$\frac{\delta T}{\delta x'} = T_{\frac{\delta f}{\delta x'}}$$

Dowód

$$\frac{\delta T_f}{\delta x'}(\varphi(x)) = -T_f\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x'}(x)\right) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\delta\varphi}{\delta x'}(x)\,dx = -\left(\cancel{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\delta f}{\delta x}\,dx\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\delta f}{\delta x}\,dx = T_{\frac{\delta f}{\delta x}}(\varphi(x))$$

to jest w przypadku jednowymiarowym. W przypadku wielowymiarowym dowód przebiega identycznie. □

Przykład

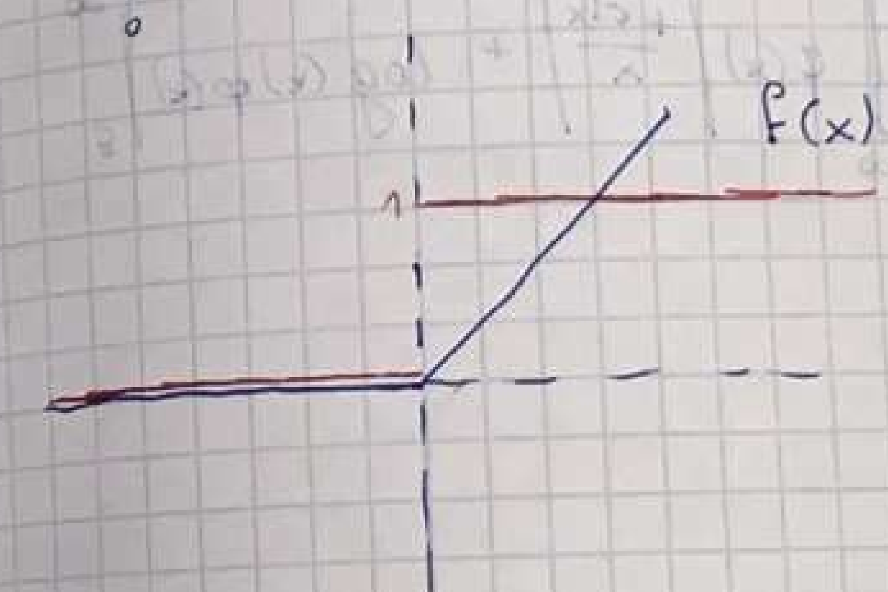
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ciągła}$$

$$T_f(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \left\{ \frac{\delta T_f}{\delta x}(\varphi(x)) = -T_f\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}(x)\right) = \right\}$$

$$= -\int_0^{\infty} x\frac{\delta\varphi}{\delta x}(x)\,dx = -\left[\cancel{x\varphi(x)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx = T_{\Theta}(\varphi(x))$$



Przykład

$$T_{\log|x|}\,\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\,\varphi(x)\,dx$$

$$T'_{\log|x|}\,\varphi(x) = T_{\log|x|}\left(-\varphi'(x)\right) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\,\varphi(x)\,dx.$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\log(-x)\,\varphi'(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty}\log(x)\,\varphi'(x)\,dx\right]$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\log(-x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{\varepsilon}\varphi(x)\left|\frac{+dx}{x}\right| + \log(x)\,\varphi(x)\Big|_{\varepsilon}^{\infty}\right.$$

$$-\int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)\,\frac{dx}{x}$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi(x)\,\frac{dx}{x} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\varphi(x)\,\frac{dx}{x} + \log(\varepsilon)\,\varphi(-\varepsilon)\right.$$

$$\left. -\log(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\right]$$

$$= V.p\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(\varepsilon)\left[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\right].$$

$$= V.p\left(\tfrac{1}{x}\right)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log(\varepsilon)}{\frac{1}{\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)}} \overset{dH}{=} V.p\left(\tfrac{1}{x}\right)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{\varphi'(\varepsilon)+\varphi'(-\varepsilon)}{[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]^2}}$$

$$= V.p\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x) + \frac{1}{2\varphi'(0)}\lim\frac{[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]^2}{\varepsilon^2}\,\varepsilon$$

$$\left\{ = \lim\left[\underbrace{\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-0)}{\varepsilon}}_{\to\varphi'(0)} - \underbrace{\frac{[\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)]}{\varepsilon}}_{\to\varphi'(0)}\right]^2 \varepsilon^{\nearrow 0} = 0\right\}$$

$$= V.p\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x).$$

14.01.2019

Przykład

$D(\mathbb{R}^n)$ – przestrzeń funkcji próbnych – funkcje gładkie nośnik zwarty.

supp f – nośnik

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0\}}$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

Niech $T\in D^*(\mathbb{R}^n)$

przestrzeń dystrybucji.

$$\|f\|_N = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ |\beta|\leq N}}\left|\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}f(x)\right|$$