Przykład
Rozważmy funkcję $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni \vec{r} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \in \mathbb{R}$ Ozn. $\frac{1}{r}$.
Funkcja $\frac{1}{r}$ definiuje dystrybucję regularną na $D(\mathbb{R}^n)$
wzorem $D(\mathbb{R}^3) \ni g \overset{T_{\frac{1}{r}}}{\longmapsto} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} g(\vec{r})\, dx\, dy\, dz$
Wykazać, że $\Delta T_{\frac{1}{4\pi r}} = \delta_0$. Zazwyczaj piszemy $\Delta \frac{-1}{4\pi r} = \delta_0$
Niech $r \neq 0$. Obliczmy $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$
Zatem $\Delta \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right) = 0.$
TRANSFORMATA FOURIERA.
Przykład.
Niech $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$. Obliczyć $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx =$
$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2 + \frac{ik}{a}x)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+\frac{ik}{2a})^2} e^{-\frac{k^2}{4a}} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+\frac{ik}{2a})^2} dx$
$\int_{\gamma_N} e^{-az^2} dz = \int_{-N}^{N} e^{-a(x+\frac{ik}{2a})^2} dx$ gdzie $\gamma_N = \{x + \frac{ik}{2a} : x \in [-N, N]\}$
Zatem $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-a(x+\frac{ik}{2a})^2} dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Definicja.
Niech $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Funkcję $\mathbb{R}^n \ni k \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} d^n x \in \mathbb{R}$ $\quad$ ($|\mathcal{F}f(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$)
nazywam transformatą Fouriera f i oznaczam $\mathcal{F}(f)$.

Przykład $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right)(k) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$ $\quad \leftarrow$ $a > 0$, $k, x \in \mathbb{R}^n$.

Własności $\mathcal{F}$.

① $k_j \mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) k_j e^{-ikx} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, i\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ikx} dx$ (całk. przez części w j-tej zmiennej)

$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) e^{-ikx} dx = \mathcal{F}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) \Rightarrow$

$|k^j \mathcal{F}(f)(k)| \leq \int \left|\frac{\partial}{\partial x_j} f\right| d^n x$. Ogólniej $|k^\alpha \mathcal{F}(f)(k)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x)\right| d^n x$

② $\frac{\partial}{\partial k^j}(\mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}(-i x_j f)(k)$.

$\left|\frac{\partial}{\partial k^j}(\mathcal{F}f)(k)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x_j||f| d^n x < \infty$.

Wniosek $\mathcal{F}f \in S(\mathbb{R}^n)$, oraz $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie Transformata Fouriera jest odwzorowaniem odwracalnym oraz $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{+ikx} dk$

Przykład $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$

$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (2\pi a)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ax^2}{2}} = e^{-\frac{ax^2}{2}}$

gdzie dA ...
zatem ...
$(*) = -\frac{1}{4\pi}$ ...
N...
$\vec{n} = $ ...
$(*) = -\frac{1}{4\pi}$ ...
$\nabla \frac{1}{r}$ ...
$\vec{n} \cdot$ ...