Wzór Plancherela:

$\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$, $(f|g) = \int \bar{f}(x) g(x)\,dx$

$(\mathcal{F}f|\mathcal{F}f) = (2\pi)^n (f|f)$

Transformata Fouriera <u>dystrybucji temperowanych</u>.

Definicja: Dystrybucją temperowaną nazywamy ciągłe liniowe odwzorowanie $T: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$\left[\begin{array}{l} \|f\|_N = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|,|\beta|\le N}} \left| x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x)\right| \quad \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \beta=(\beta_1,\dots,\beta_n) \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}. \\ f_n \to f \text{ gdy } \|f_n - f\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \ \forall N. \end{array}\right]$$

Oznaczenie $S^*(\mathbb{R}^n)$ p-ń dyst. temperowanych.

$D^* = \mathcal{D}, D$

Stwierdzenie

Jeśli $f \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją taką, że

$\exists\, C > 0$ & $K \in \mathbb{N}$: $|f(x)| \le C \cdot (1+x^2)^K$

Wówczas $T_f \in S^*(\mathbb{R}^n)$

Dowód

Niech $g_n \longrightarrow g$ w $S(\mathbb{R}^n)$. Wtedy $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \| w(x)(g_n - g)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

dla wszystkich w. A stąd $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(g_n - g)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Czyli $T_f \in S^*(\mathbb{R}^n)$.

Przykład $f = x^2 \cdot \sin(x)$, $T_f \in S^*(\mathbb{R}^1)$.

Transformata Fouriera <u>dyst. temp.</u>

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(k)\, \underline{\mathcal{F}(g)(k)}\, dk = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(k)\, \underline{e^{-ikx} g(x)\,dx}\,dk = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x) g(x)\,dx.$$

Czy można zdefiniować tr. Fouriera $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tak aby

$\mathcal{F}(T_f)(g) = T_{\mathcal{F}f}(g) = T_f(\mathcal{F}g)$. Zdefiniujmy $\mathcal{F}T(g) = T(\mathcal{F}g)$.

Problem: jeśli $g \in D(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ to $\mathcal{F}g \notin D(\mathbb{R}^n)$.

Lemat: Jeśli $g \in D(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ to $\operatorname{supp}(\mathcal{F}g) = \mathbb{R}$.

Dowód. $(\mathcal{F}g)(k) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ikx}\,dx$. Rozważmy funkcję holomorficzną

$\hat{g}: \mathbb{C} \ni z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-izx}\,dx$: $\hat{g}\big|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}g$.

Skoro zera $\hat{g}$ są izolowane to zera $\mathcal{F}g$ są izolowane.

i $\mathcal{F}g$ nie ma zwartego nośnika.

Definicja: Jeśli $T \in S^*(\mathbb{R}^n)$ to transformata Fouriera $\mathcal{F}T$ dystrybucji T jest zdefiniowana wzorem

$(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}f)$. łatwo sprawdzić, że $\mathcal{F}T \in S^*(\mathbb{R}^n)$

Przykład: Rozważmy $T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot f(x)\,dx = T_1(f)$

$(\mathcal{F}T_1)(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)\,dk$.

$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(0) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta_0(f)$. $\quad \mathcal{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0$.

ogólniej $\mathcal{F}(e^{ikx}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta_x$

$\boxed{\mathcal{F}(1) = ?}$

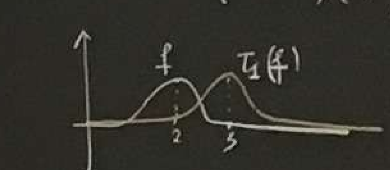
$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} (\mathcal{F}f)(k)\,dk = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(x)$

$\int e^{+ik(x-y)}\,dk$

$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta(x-y)$.

Definicja. Niech $h \in \mathbb{R}^n$ i $T \in S^*(\mathbb{R}^n)$. Wówczas przesunięciem T o wektor h nazywamy dystrybucję $\tau_h T$ daną wzorem $(\tau_h T)(f) = T(\tau_{-h} f)$ gdzie $\tau_{-h} f(x) = f(x+h)$

$\int f g =$
$- \int f g' +$
$f g|$



Stwierdzenie:

① $\partial_{k^j}(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(-ix^j T)$

② $k^j(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(i\partial_{x^j} T)$

③ $\tau_h(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(e^{ihx} T)$

④ $e^{ihk}(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}(\tau_{-h} T)$

Dowód

① $(\partial_{k^j} \mathcal{F}T)(f) = -(\mathcal{F}T)(\partial_{k^j} f) = -T\left(\int \partial_{k^j} f(k) e^{-ikx}\,dk\right)$

$= T\left(-ix^j \int f(k) e^{-ikx}\,dk\right) = \mathcal{F}(-ix^j T)(f)$

② $(k^j \mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}(k^j f)) = T\left(\int k^j f(k) e^{-ikx}\,dk\right)$

$T(i\partial_{x^j}(\mathcal{F}f)) = \mathcal{F}((-i\partial_{x^j} T))(f)$

$k+h = \tilde{k}$

③ $\tau_h(\mathcal{F}T)(f) = \mathcal{F}T(\tau_{-h} f) = T\left(\int f(k+h) e^{-ikx}\,dk\right)$

$= T\left(\int f(\tilde{k}) e^{-i\tilde{k}x}\,d\tilde{k} \cdot e^{ihx}\right) = \mathcal{F}(e^{ihx} T)(f)$.

④ $e^{ihk}(\mathcal{F}T)(f) = (\mathcal{F}T)(e^{ihk} f) = T\left(\int e^{ihk} f(k) e^{-ikx}\,dk\right) =$

$= T(\tau_h(\mathcal{F}f)) = \mathcal{F}(\tau_{-h} T)(f)$.

Przykład: Obliczyć transformatę Fouriera $f(x) = x^2 \sin(x)$

$$\mathcal{F}\left(x^2 \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)(k) \overset{①}{=} \frac{1}{2i}\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \mathcal{F}(e^{ix} - e^{-ix}) =$$

$$\overset{③}{=} \frac{1}{2i}\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(\tau_1 \mathcal{F}(1) - \tau_{-1}\mathcal{F}(1)\right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \cdot \left(\delta_1''(x) - \delta_{-1}''(x)\right)$$

Wzór Sumacyjny Poissona.

$T \in S^*(\mathbb{R}^n)$: $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ $\quad (Tf) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$

Obliczyć $\mathcal{F}T$.

$e^{ix}T = T$, gdyż $e^{ix}\delta_{2\pi n} = e^{i2\pi n}\delta_{2\pi n} = \delta_{2\pi n}$.

$\tau_{2\pi} T = T$, gdyż $\tau_{2\pi}\delta_{2\pi n} = \delta_{2\pi(n+1)}$.

Zatem z 3 i 4 $\quad \tau_1(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}T$, $\quad e^{-2\pi i k}\mathcal{F}T = \mathcal{F}T$.

$\Rightarrow (1-e^{-2\pi i k})(\mathcal{F}T) = 0 \Rightarrow \operatorname{supp}\mathcal{F}T \subset \mathbb{Z}$.

Dalej, $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ będzie małym otoczeniem zera.

$\left(\frac{1-e^{2\pi i k}}{k}\right) \underline{k\cdot\mathcal{F}T}|_{\mathcal{O}} = 0 \Rightarrow k\cdot \mathcal{F}T|_{\mathcal{O}} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}T|_{\mathcal{O}} = c\cdot\delta_0 \Rightarrow \mathcal{F}T = c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_m$.

$f = e^{-\frac{ax^2}{2}}$ $\quad \mathcal{F}f = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{-\frac{k^2}{2a}}$, $\quad a = 2\pi$

$$\boxed{\mathcal{F}T = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_m}$$

$\rightsquigarrow f = e^{-\pi x^2}$ $\quad \mathcal{F}f(k) = e^{-\frac{k^2}{4\pi}}$.

Zatem $\quad (\mathcal{F}T)(f) = \underbrace{T}_{= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n}}(\mathcal{F}f) = \sum_{n} e^{-\frac{4\pi^2}{4\pi}n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$.

z drugiej strony $\quad (\mathcal{F}T)(f) = \left(c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n\right)(f) = c\cdot\sum e^{-\pi n^2}$.

Stąd $\boxed{c=1}$

Wzór sumacyjny Poissona $\quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(2\pi m)$

dla wszystkich $f\in S(\mathbb{R}^n)$