$$T^{(k,l)}V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-razy}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{l\text{-razy}}.$$

Terminologia $\omega \in \Lambda^k V$ nazywamy k-formą na V lub k-liniową antysymetryczną formą

$\mathrm{Alt}\ T^{(k,0)}V \longrightarrow \Lambda^k V \qquad \theta^i \in V^* \qquad i = 1, \dots, k$

$$\theta^1 \otimes \theta^2 \otimes \dots \otimes \theta^k \xrightarrow{\mathrm{Alt}} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sgn}\sigma\ \theta^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \theta^{\sigma(k)}$$

Przykład. $\mathrm{Alt}(\theta^1 \otimes \theta^2) = \frac{1}{2}(\theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \otimes \theta^1)$

Definicja Niech $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^l V$. Wówczas $(k+l)$-formę daną wzorem $\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$ nazywamy iloczynem zewnętrznym ω i η i oznaczamy $\omega \wedge \eta$

Przykład $\theta^1 \wedge \theta^2 = \theta^1 \otimes \theta^2 - \theta^2 \wedge \theta^1$.

Stwierdzenie.

① Odwzorowanie $\Lambda^k V \times \Lambda^l V \ni (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l} V$ jest dwuliniowe: $(\alpha_1 \omega^1 + \alpha_2 \omega^2) \wedge \eta = \alpha_1 \omega^1 \wedge \eta + \alpha_2 \omega^2 \wedge \eta$

$\omega \wedge (\alpha_1 \eta^1 + \alpha_2 \eta^2) = \alpha_1 \omega \wedge \eta^1 + \alpha_2 \omega \wedge \eta^2$.

② Zachodzi wzór $\omega \wedge \eta = (-1)^{k \cdot l} \eta \wedge \omega$

③ Jeśli dodatkowo $\rho \in \Lambda^m V$ to

$$\omega \wedge (\eta \wedge \rho) = (\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \rho)$$

① - oczywiste.

② wynika z równości: $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, \dots, k, k+1, \dots, k+l \\ k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k \end{pmatrix} = (-1)^{k \cdot l}$

③ Zauważmy na początek, że

$\mathrm{Alt}(S \otimes (\mathrm{Alt}(T \otimes R) - T \otimes R)) = 0$ gdyż

$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T \otimes R) - T \otimes R) = \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T \otimes R)) - \mathrm{Alt}(T \otimes R) = 0$

i wystarczy skorzystać z poprzedniego tw.

$$\omega \wedge (\eta \wedge \rho) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \wedge \rho) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,(l+m)!} \cdot \frac{(l+m)!}{l!\,m!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \rho))$$

$$\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \rho) = (\omega \wedge \eta) \wedge \rho$$

Stwierdzenie

Niech $(e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą V i $(e^1, \dots, e^n)$ bazą dualną. Wówczas układ k-form $(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ jest bazą $\Lambda^k V$. W szczególności $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dowód. Ten układ k-form rozpina $\Lambda^k V$. Weźmy $\omega \in \Lambda^k V \subset T^{(k,0)}V$. W szczególności $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$

W takim razie $\mathrm{Alt}\,\omega = \omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{Alt}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}) =$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\ \omega_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)} \right) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

Liniowa niezależność.

Przypuśćmy, że $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = 0$

Zauważając, że $\lambda_{j_1 \dots j_k} = \left(\sum_{i_1 \dots i_k} \lambda_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \right)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$

dostajemy $\lambda_{i_1 \dots i_k} = 0$ dla $i_1 < \dots < i_k$

Fakt: $\dim V = n$ to $\dim \Lambda^n V = 1$ oraz jeśli $(e^1, \dots, e^n)$ jest bazą V^* to $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ jest bazą $\Lambda^n V$. Ponadto jeśli $(\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n)$ jest drugą bazą V^* i $\tilde{e}^i = b^i_j e^j$ to

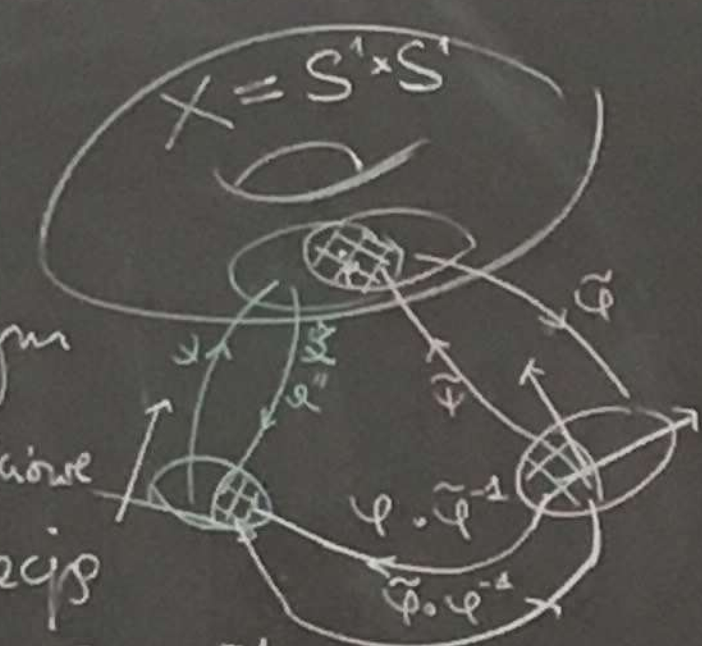
$$\tilde{e}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}^n = \det(b)\, e^1 \wedge \dots \wedge e^n$$

$$\tilde{e}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}^n = \sum_{j_1 \dots j_n} b^1_{j_1} e^{j_1} \wedge \dots \wedge b^n_{j_n} e^{j_n} = \sum_{\sigma \in S_n} b^1_{\sigma(1)} \dots b^n_{\sigma(n)} \underbrace{e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}}_{\operatorname{sgn}\sigma\, e^1 \wedge \dots \wedge e^n}$$

$$= \det(b)\, e^1 \wedge \dots \wedge e^n.$$

Definicja:

Niech X będzie dowolnym zbiorem.



Jeśli $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ jest zbiorem otwartym a $\psi : \Theta \to X$ które jest różnowartościowe to ψ nazywamy lokalną parametryzacją zbioru X. Odwzorowanie odwrotne $\varphi = \psi^{-1} : \psi(\Theta) \to \Theta$ nazywamy lokalnym układem współrzędnych na $\psi(\Theta)$, lub nazywamy je mapą.

Definicja.

Atlasem $\mathcal{A}$ na zbiorze X nazywamy system map $\mathcal{A} = \{\varphi_i : i \in I\}$ t. że $\forall p \in X$ istnieje $i_0 \in I$ t. że $p \in \operatorname{dom} \varphi_{i_0}$.

Mówimy, że atlas $\mathcal{A}$ na X jest C^r-zgodny jeśli dla każdej pary map $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{A}$ odwzorowanie przejścia

$\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \tilde{\varphi}) \longrightarrow \varphi(\operatorname{dom} \varphi \cap \operatorname{dom} \tilde{\varphi})$ jest klasy C^r.

"Definicja" Parę $(X, \mathcal{A})$ gdzie $\mathcal{A}$ jest atlasem C^∞-zgodnym nazywamy rozmaitością gładką a taki atlas nazywamy strukturą różniczkową na X.

Definicja: Niech $(X, \mathcal{A})$ oraz $(Y, \mathcal{B})$ będą rozmaitościami gładkimi. Mówimy, że $F : X \to Y$ jest gładkie jeśli $\forall \varphi \in \mathcal{A}$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{B}$ odwzorowanie $\tilde{\varphi} \circ F \circ \varphi^{-1} : \Theta \to \mathbb{R}^k$ jest gładkie, gdzie $\Theta = \varphi(\operatorname{dom} \varphi)$

Definicja. Mówimy, że $\mathcal{U} \subset X$ jest otwarty jeśli $\forall \varphi \in \mathcal{A}$ zbiór $\varphi(\mathcal{U} \cap \operatorname{dom} \varphi)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^k$.

Dodatkowe założenia o $(X, \mathcal{A})$

1) $\forall p, q \in X$ istnieją $\mathcal{U}_p, \mathcal{U}_q \subset X$ - otwarte : $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q = \emptyset$ oraz $p \in \mathcal{U}_p$, $q \in \mathcal{U}_q$

2) Istnieje przeliczalna rodzina $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gdzie $\mathcal{U}_n \underset{otw}{\subset} X$ t. że dowolny $\mathcal{U} \underset{otw}{\subset} X$ jest sumą pewnej podrodziny $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$