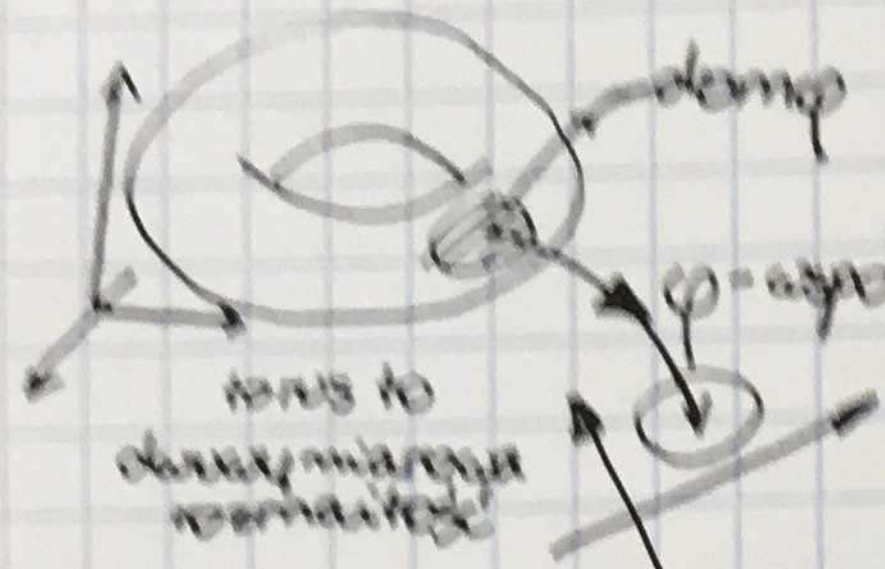
Analiza III 15.10.2018 r.

X, $\mathcal{A}$ - atlas, $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi: \operatorname{dom}\varphi \to \mathbb{R}^n$
$\operatorname{dom}\varphi \subset X$



$\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$ — i-te współrzędne punktu p

Podrozmaitości w $\mathbb{R}^n$ / rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^n$
Przykład: $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) : (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1\}$
(sfera)

Definicja:
Mówimy, że $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością k-wymiarową w $\mathbb{R}^n$ jeśli $\forall p \in X$ można znaleźć zbiór otwarty $p \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ oraz współrzędne $\varphi = (x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \to V$ ($\mathcal{U}$ ma zawierać p)

takie, że $X \cap \mathcal{U} = \{q \in \mathcal{U} : x^1(q) = \dots = x^{n-k}(q) = 0\}$

Przykład:
$X = \{(0, \dots, 0, t^1, \dots, t^k) : t^i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ ~~$\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^{n-k}$~~ jest podrozmaitością k-wymiarową w $\mathbb{R}^n$.

Atlas na $X \subset \mathbb{R}^n$ takim j.w.:
~~Atlas na~~ ustalmy $p \in X$ oraz $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ j.w. Współrzędne na $X \cap \mathcal{U}$ zadajemy wzorem:
$X \cap \mathcal{U} \ni p \mapsto (x^{n-k+1}(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^k$
pozostałe się wyzerują

Twierdzenie:
Niech $F = (f^1, \dots, f^{n-k}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ (jakaś kolekcja funkcji) będzie odwzorowaniem gładkim ~~oraz~~ takim, że $\vec{0}_{n-k} \in F(\mathbb{R}^n)$ (wektor zerowy). Niech $X = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \vec{0}_{n-k}\}$. Jeśli $\forall x \in X$ rząd $F'(x) = n-k$ (rząd to wymiar odwzorowania) to X jest rozmaitością k-wymiarową w $\mathbb{R}^n$

Przykład:
$F(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 - 1$ $\quad F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1 \implies k = n$
$F'(x^1, \dots, x^{n+1}) = (2x^1, 2x^2, \dots, 2x^{n+1})$, rząd $F'(x) = 1$ $\forall x \in S^n$, $S^n = \{x : F(x) = 0\}$
jest podrozmaitością.

Dowód twierdzenia:
~~Załóżmy, że $F(x) =$~~
Niech $x \in X$. Rząd $F'(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^{n-k}(x) \end{pmatrix}$ jest równy $n-k$. Zatem wiersze $F'(x)$ są liniowo niezależne.

Niech $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$ będą towektorami takimi, że macierz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1(x) \\ \dots \\ \operatorname{grad} f^{n-k}(x) \\ a^1 \\ \vdots \\ a^k \end{pmatrix}$$

(x jest ustalony) $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna. Zdefiniujmy odwzorowanie $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$G(q) = \begin{pmatrix} f^1(q) \\ \vdots \\ f^{n-k}(q) \\ a^1 q \\ \dots \\ a^k q \end{pmatrix}$$

gdzie $a^i q$ – iloczyn skalarny

Zauważmy, że $G'(x) = A$. Korzystając z tw. o lokalnej odwracalności mogę wskazać, że $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi = G|_{\mathcal{U}}$ jest lokalnym układem współrzędnych na $\mathbb{R}^n$.
Dowód kończymy zauważając, że $X \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f^1(x) = \dots = f^{n-k}(x) = 0\}$

Niech $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$ będą kowektorami t. że macierz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f^1(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f^{n-k}(x) \\ a^1 \\ \vdots \\ a^k \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

jest odwracalna. Zdefiniujmy odwz.

$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$G(q) = \begin{pmatrix} f^1(q) \\ \vdots \\ f^{n-k}(q) \\ a^1 \cdot q \\ \vdots \\ a^k \cdot q \end{pmatrix}$$

gdzie $a^i \cdot q$ – iloczyn skal.

Zauważmy $G'(x) = A$. Korzystając z tw. o lokalnej odwracalności możemy wskazać $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi = G|_{\mathcal{U}}$ jest lokalnym ukł. wsp. na $\mathbb{R}^n$.

Dowód kończymy zauważając, że $X \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f^1(x) = \dots = f^{n-k}(x) = 0\}$.

Wektor styczny w punkcie $p \in X$.

Przykład/przypomnienie.

(a) $X \subset \mathbb{R}^n$ – rozmaitość zanurzona.

$\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to X$ – gładka krzywa, $\gamma(0) = p$

$\dot\gamma(0) = (\dot\gamma^1(0), \dot\gamma^2(0), \dots, \dot\gamma^n(0)) \in \mathbb{R}^n$

$\dot\gamma(0) \in T_p X$. $T_p X$ – podprzestrzeń wektorowa w $\mathbb{R}^n$ wymiaru $\dim X$.

(b) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ jak w twierdzeniu oraz $X = \{F(x) = 0\}$

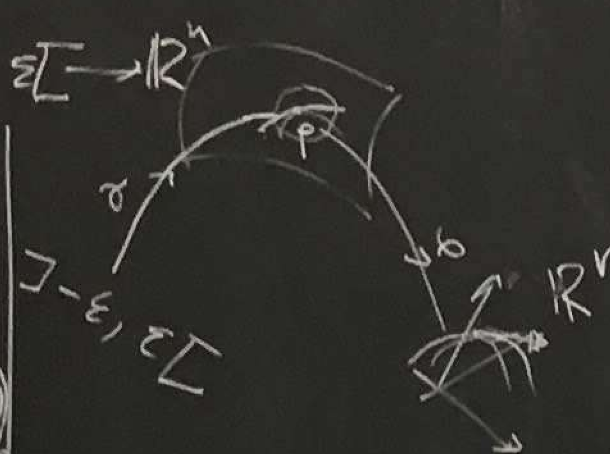
$T_p X = \ker F'(p)$

Przestrzeń styczna w $p \in X$ gdzie X – abstrakcyjna rozmaitość. $\dim X = n$

$$\Gamma(p, X) = \left\{ \gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to X : \begin{array}{l} \gamma \text{ jest gładką krzywą} \\ \text{t. że } \gamma(0) = p \end{array} \right\}.$$

Gładkość $\gamma \iff \forall\, \varphi \in \mathcal{A}$ odw. $\varphi \circ \gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to \mathbb{R}^n$ jest gładkie.

Mówimy, że $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(p, X)$ są **równoważne** jeśli $\exists\, \varphi \in \mathcal{A}$ t. że $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$



Ustalmy $\gamma \in \Gamma(p, X)$.

Notacja $[\gamma] = \{\tilde\gamma : \exists\, \varphi \in \mathcal{A} : (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \tilde\gamma)'(0)\}$

Zbiór $\{[\gamma] : \gamma \in \Gamma(p, X)\}$ oznaczamy symbolem $T_p X$ i nazywamy przestrzenią styczną do X w punkcie p.

Stwierdzenie.

Niech $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(p, X)$, oraz φ i $\tilde\varphi \in \mathcal{A}$. Jeśli $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ to $(\tilde\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\tilde\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

Dowód. $(\tilde\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\tilde\varphi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\, (\varphi \circ \gamma_1)'(0) =$

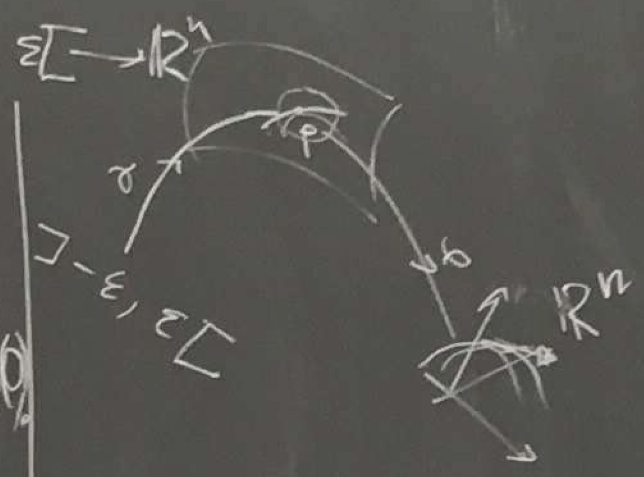
$= (\tilde\varphi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\, (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\tilde\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

Przestrzeń styczna w $p \in X$ gdzie X – abstrakcyjna rozmaitość. $\dim X = n$

$\Gamma(p, X) = \{ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X : \ \gamma$ jest gładką krzywą t. że $\gamma(0) = p \}$.

Gładkość $\gamma \iff \forall \varphi \in \mathcal{A}$ odw. $\varphi \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ jest gładkie.

Mówimy, że $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(p, X)$ są <u>równoważne</u> jeśli $\exists \varphi \in \mathcal{A}$ t. że $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.



Ustalmy $\gamma \in \Gamma(p, X)$.

Notacja $[\gamma] = \{ \tilde{\gamma} : \exists \varphi \in \mathcal{A} : (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0) \}$

Zbiór $\{ [\gamma] : \gamma \in \Gamma(p, X) \}$ oznaczamy symbolem $T_p X$ i nazywamy przestrzenią styczną do X w punkcie p.

Stwierdzenie.
Niech $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(p, X)$, oraz φ i $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}$. Jeśli $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ to $(\tilde{\varphi} \circ \gamma_1)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ \gamma_2)'(0)$.

Dowód. $(\tilde{\varphi} \circ \gamma_1)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \, (\varphi \circ \gamma_1)'(0) =$
$= (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \, (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ \gamma_2)'(0)$.

Dodawanie elementów $T_p X$. $\dim X = n$

Uwaga 1.
Niech $\varphi \in \mathcal{A}$. Dla każdego $w \in \mathbb{R}^n$ istnieje element $[\gamma] \in T_p X$ $w = (\varphi \circ \gamma)'(0)$. Wystarczy położyć $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tw)$

Uwaga 2.
Jeśli $[\gamma_1], [\gamma_2] \in T_p X$ to $[\gamma_1] +_\varphi [\gamma_2] := \left[\varphi^{-1}\left(\varphi(p) + t \cdot \left((\varphi \circ \gamma_1)'(0) + (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \right) \right) \right]$

Ponadto dla $a \in \mathbb{R}$ $a_\varphi[\gamma] := \left[\varphi^{-1} \left(\varphi(p) + at \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) \right) \right]$

Suma i iloczyn nie zależą od wyboru $\varphi \in \mathcal{A}$.

Niech $[\gamma] = [\gamma_1] +_\varphi [\gamma_2]$ czyli $(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0) + (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

Niech dalej $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}$ i $[\tilde{\gamma}] = [\gamma_1] +_{\tilde{\varphi}} [\gamma_2]$

Czy $[\gamma] = [\tilde{\gamma}]$? Obliczamy $(\tilde{\varphi} \circ \gamma)'(0) =$

$[\gamma] = [\tilde{\gamma}]$

$= \left(\tilde{\varphi} \left(\varphi^{-1} \left(\varphi(p) + t \left((\varphi \circ \gamma_1)'(0) + (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \right) \right) \right) \right)'(0)$

$= (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \left((\varphi \circ \gamma_1)'(0) + (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \right) = (\tilde{\varphi} \circ \gamma_1)'(0) + (\tilde{\varphi} \circ \gamma_2)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma})'(0)$.