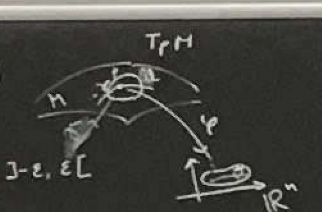
M – manifold; zbiór z atlasem $\mathcal{A}$, $p \in M$

$p \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$; $\varphi: \mathcal{U} \to \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{U}} \to \tilde{\mathcal{O}}$



$\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, $\gamma(0) = p$ $\qquad [\gamma] \in T_pM$

Składowe wektora $[\gamma]$ we wsp. φ $\qquad (\varphi \circ \gamma)'(0) = v \in \mathbb{R}^n$.

Transformacja składowych: $\mathbb{R}^n \ni \tilde{v} = (\tilde{\varphi} \circ \gamma)'(0) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) =$

$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ – odwzorowanie przejścia $\qquad = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0)$

Jeśli $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\tilde{\varphi} = (y^1, \dots, y^n)$ $\qquad = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\, v$

$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$ $\qquad = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^1(p), \dots, x^n(p))\right) v$

Inny punkt widzenia na T_pM. $\qquad C^\infty(M)$ – p-ń funkcji gładkich.

Niech $w \in T_pM$, $w = [\gamma]$. Niech $f: M \to \mathbb{R}$ będzie gładka.

Rozważmy odwzorowanie $D_w: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ gdzie

$$D_w(f) = (f \circ \gamma)'(0). \quad \left(\underline{\underline{\text{we wsp}}} \; ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))'(0) = (f \circ \varphi^{-1})' \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) \right)$$

nie zależy od wyboru γ

Własności D_w

(1) D_w jest liniowe

(2) Reguła Leibniza

$D_w(f g) = D_w(f) \cdot g(p) + D_w(g) \cdot f(p)$

Definicja.

Jeśli odwzorowanie $D: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ spełnia 1) i 2)

to mówimy, że D jest różniczkowaniem $C^\infty(M)$ w pkcie $p \in M$.

Zbiór takich różniczkowań oznaczamy $\mathrm{Der}_p(M)$.

Cel: Wykazać, że wszystkie różniczkowania są postaci $D = D_w$ gdzie $w \in T_pM$.

Przykład. $\mathcal{O} \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $\vec{0} \in \mathcal{O}$ $\qquad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{x=\vec{0}}}_{\partial_1(0)}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_{x=\vec{0}}}_{\partial_n(0)}$ jest liniowo niezależnym układem różniczkowań w pkcie $\vec{0}$

$D = \alpha^1 \partial_1(0) + \dots + \alpha^n \partial_n(0) = 0$. $\quad x^j$ – j-ta wsp. kartezjańska.

$0 = D(x^j) = \underline{\underline{\alpha^j}}$

Lemat. Jeśli $D \in \mathrm{Der}_{\vec{0}}(\mathcal{O})$ to istnieją $\alpha^1, \dots, \alpha^n \in \mathbb{R}$ (jednoznacznie wyznaczone) t. że $D = \alpha^1 \partial_1(\vec{0}) + \dots + \alpha^n \partial_n(\vec{0})$ $\qquad 1_{\mathcal{O}}: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $1_{\mathcal{O}}(x) = 1$

Dowód. 1) Zauważmy $D(1_{\mathcal{O}}) = 0$ gdyż:

$$D(1_{\mathcal{O}}) = D(1_{\mathcal{O}}^2) \overset{\mathrm{RL}}{=} 1_{\mathcal{O}}(\vec{0}) \cdot D(1_{\mathcal{O}}) + D(1_{\mathcal{O}})\, 1_{\mathcal{O}}(\vec{0}) = 2\, D(1_{\mathcal{O}}).$$

2) Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką (lokalnie)

$\exists$ gładkie funkcje $g_1, \dots, g_n: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ t. że $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x)$

oraz $g_i(0) = (\partial_i f)(0)$

Zatem: $(Df) = D\Big(\underbrace{f(0)}_{\text{zeruje}} + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x) \Big) = \sum D(x^i)\, g_i(0) + x^i(0) \overset{0}{D}(g_i) =$

$= \sum \underbrace{D(x^i)}_{\text{skalary}} \partial_i(0)(f)$; w taki sposób $\underbrace{D = \sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i(0)}$ gdzie $\alpha^i = D(x^i)$.

Wyjaśnienie 2):

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt \overset{\text{wzór na poch. złożenia}}{=} f(0) + \sum_{i=1}^n x^i \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(tx)\, dt}_{g_i(x)}. \qquad g_i(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(0)$$

Fakt. Jeśli $f = g$ w otoczeniu punktu $p \in M$ oraz $D \in \mathrm{Der}_p(M)$ to $D(f) = D(g)$.

Dowód. $h = f - g$ znika w otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu p.

Niech $\varrho: M \to \mathbb{R}$ t. że $\varrho = 0$ poza zbiorem $\mathcal{U}$ i jest równe 1 w pewnym otoczeniu p

Zauważmy $h \varrho = 0$. Zatem $0 = D(h \varrho) = D(h)\, \varrho(p) + D(\varrho) \underset{0}{h(p)} =$
$= D(h)\, 1 + 0$

Jak wygląda $\mathrm{Der}_p(M)$?

Niech $\varphi: \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ będzie układem współrzędnych wokół punktu p. Rozważmy krzywe $\gamma_1, \dots, \gamma_n:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ gdzie

$\gamma_i = \varphi^{-1}(\varphi(p) + t e_i)$ gdzie $e_1, \dots, e_n$ – baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$,

$v_i = [\gamma_i]$. Różniczkowanie D_{v_i} ma następującą postać

$D_{v_i}(f) = \frac{d}{dt}\left(f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + t e_i)\right)(0) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ $\qquad$ Notacja: $D_{v_i} = \partial_i(p)$

Przypomnienie $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Notacja $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial x^i}$

"Powtarzając dowód Lematu 1 pokazujemy, że układ operatorów różniczkowych $(\partial_1^{\varphi}(p), \ldots, \partial_n^{\varphi}(p))$ jest bazą $Der_p(M)$

Od tej pory będziemy utożsamiać $T_pM \simeq Der_p(M)$
$$\overset{\in}{v} \longmapsto D_v$$

Wiązka styczna:

Niech TM będzie sumą mnogościową p-ni stycznych.

$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ TM jest rozmaitością wymiaru $2\dim M$:

Niech $\mathcal{A}$ będzie atlasem na M, $\varphi \in \mathcal{A}$ $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.

$\bigsqcup_{p\in \mathcal{U}} T_pM \ni v \longmapsto (\varphi(p), v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

gdzie $v \in T_pM$ $\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$ gdzie $v = [\gamma]$.

Atlas na TM otrzymuje biorąc wszystkie wsp. na $\bigsqcup_{p\in \mathcal{U}} T_pM$ j.w.

Niech $\pi: TM \to M$ będzie odwzorowaniem (gładkim) t. że $\pi(v) = p$ gdzie $v \in T_pM$.
$$\begin{array}{c} TM \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

Definicja. Gładkie pole wektorowe na M to gładkie odwzorowanie $X: M \longrightarrow TM$ t. że $\pi(X(p)) = p$. $(X(p) \in T_pM)$

$\mathfrak{X}(M)$ – przestrzeń pól wektorowych.

Pola wektorowe zadają operatory różniczkowe 1-go rzędu:

$C^\infty(M) \ni f$, $X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto X(f) \in C^\infty(M)$ gdzie

$X(f)(p) = X(p)(f)$.

Własności: 1) $X(fg) = X(f)g + X(g)f$.

2) $X(f+g) = X(f) + X(g)$.

Pola wektorowe $\cong$ op. różniczkowe 1-go.

We wsp. φ
$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i^{\varphi}$