$p \geq 1$ $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu) = \{ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C} :$ f - mierzalna $\int_{\mathbb{R}^k} |f|^p d\mu < \infty \}$

miara Leb.

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

jednorodność : $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$.

nierówność Δ : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ - prawie wszędzie

$\mu(\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \neq 0\}) = 0$.

$N = \{ f : \|f\|_p = 0 \} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$

podprzestrzeń wektorowa.

Wprowadzimy relację (równoważności) w $\mathcal{L}^p$.

$f \sim g$ gdy $f - g \in N$.

$[f]_N$ - klasa f względem $\sim$.

$= \{ g \in \mathcal{L}^p : g \sim f \}$.

Zbiór tych klas oznaczamy $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)/N$

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)/N$ jest unormowaną p-nią wektorową

$[f]_N + [g]_N = [f+g]_N$, $\lambda [f]_N = [\lambda f]$

$\|[f]_N\|_p = \|f\|_p$. Zauważmy, że $\|[f]_N\|_p = 0 \iff \|f\|_p = 0 \iff f \in N \iff [f]_N = 0$.

$[g]_N + [f]_N = [g+f]_N = [g]_N \quad \forall g \in \mathcal{L}^p$

Oznaczenie $L^p(\mathbb{R}^k, d\mu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)/N$

Twierdzenie P-ń $L^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$ jest przestrzenią Banacha = (Ciągi Cauchy'ego są zb.)

Uwaga: np dla $p=2$ $L^2(\mathbb{R}^k, d\mu)$ jest p-nią Hilberta:

Iloczyn skalarny $\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^k} \bar{f}(x) g(x) \, d\mu(x)$ i $\|f\| = \langle f | f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

ciągi Cauchy'ego w L^2 są zbieżne.

Dowód: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego L^p.

Ćwiczenie: jeśli (f_n) (c. Cauchy'ego) ma podciąg zbieżny to $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny.

① Ewentualnie biorąc podciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mogę założyć, że $\|f_{n+1}-f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$

② Rozważmy funkcje $g_1=f_1$, $g_n=f_n-f_{n-1}$ $n>1$. $\in L^p$.

Niech $G(x)=\sum_{l=1}^{\infty}|g_l(x)|$. Dla jakich $x\in\mathbb{R}^k$ $G(x)<\infty$?

$$\Big\|\sum_{l=1}^{n}|g_l(x)|\Big\|_p \leq \sum_{l=1}^{n}\|g_l\|_p \leq \sum_{l=1}^{\infty}\|g_l\|_p = \|f\|_1 + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \infty.$$

Zatem $\Big\|\sum_{l=1}^{\infty}|g_l(x)|\Big\|_p<\infty$ i widzimy, że $\sum_{l=1}^{\infty}|g_l(x)|<\infty$ dla μ-prawie wszystkich $x\in\mathbb{R}^k$. A więc szereg $\sum_{l=1}^{\infty}g_l(x)$ jest zbieżny — " — " —

Skoro $\sum_{l=1}^{n}g_l(x) = f_n(x)$ to $f_n(x)$ jest — " — " — " — " —

$\cancel{f_1}+\cancel{f_2}-\cancel{f_1}+\dots+\boxed{f_n}-\cancel{f_{n-1}}$

Niech $f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{- gdy ciąg jest zbieżny}\\ 0 & \text{- w przeciwnym przyp.}\end{cases}$

Czy $\|f_n-f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?

Skorzystamy z tw Leb. o zb. zmaj.

Zauważmy, że $|f-f_n|^p=\Big|\sum_{l=n+1}^{\infty}g_l\Big|^p \leq \Big(\sum_{l=1}^{\infty}|g_l|\Big)^p = (G)^p$ ← majoranta

$\xRightarrow{\text{tw. Leb.}}$ $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k}|f-f_n|^p d\mu = 0$ ∎

P-nie Hilberta: X - p-ń wekt. nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym $\langle\ |\ \rangle$

Norma na X: $\|x\| = \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Jeśli X jest zupełne w $\|\ \|$ to mówimy, że X jest p-nią Hilberta. Przykład $L^2(\mathbb{R}^k)$.

Układ wektorów $(e_i)_{i\in I}$ jest ortonormalny jeśli $\langle e_{i_1}|e_{i_2}\rangle = \delta_{i_1 i_2}$ $i_1, i_2 \in I$

Definicja/twierdzenie.

Mówimy, że układ ortonormalny $(e_i)_{i\in I}$ jest bazą X jeśli spełniony jest jeden z równoważnych warunków.

(i) jeśli $x \in X$ spełnia $\langle e_i|x\rangle = 0$ dla wszystkich $i \in I \Rightarrow x = 0$.

(ii) Układ $(e_i)_{i\in I}$ jest maksymalnym układem ortonormalnym.

(iii) Jeśli $x \in X$ oraz $\alpha_i = \langle e_i|x\rangle$ to $\|x\| = \left(\sum_{i\in I} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(iv) —— " —— " —— " —— to $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$.

Przykład

$L^2([0,2\pi])$ $n \in \mathbb{Z}$. $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą $L^2([0,2\pi])$.

Ćwiczenia.

Uwaga: Każda p-ń Hilberta posiada bazę ortonormalną, co wynika z aksjomatu wyboru. Ponadto wszystkie bazy są równoliczne.

Mówimy, że p-ń Hilberta jest ośrodkowa jeśli posiada przeliczalną (lub skończoną) bazę.

Rzuty ortonormalne: $Y \subset X$ - podprzestrzeń domknięta. Rzut ortonormalny na Y definiuje się następująco: ustalmy bazę ortonormalną Y $(f_j)_{j\in J}$.

... posiada bazę ortonormalną, co wynika z aksjomatu wyboru. Ponadto wszystkie bazy są równoliczne.

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą $L^2([0,2\pi])$.

Mówimy, że p-ń Hilberta jest ośrodkowa jeśli posiada przeliczalną (lub skończoną) bazę.

Rzuty ortogonalne: $Y \subset X$ - podprzestrzeń domknięta. Rzut ortogonalny na Y definiuje się następująco: wybierzmy bazę ortonormalną Y $(f_j)_{j\in J}$.

Niech $\alpha_j = \langle f_j | x \rangle$. Zdefiniujmy $\sum_{j\in J} \alpha_j f_j \in Y$.

$\boxed{\text{ten szereg jest zbieżny.}}$

$$\langle f_k | x - \sum_{j\in J} \alpha_j f_j \rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0.$$

Zatem
$$x = \underbrace{\sum_{j\in J} \alpha_j f_j}_{\in Y} + \underbrace{\left(x - \sum_{j\in J} \alpha_j f_j\right)}_{\in Y^\perp}.$$

$P_Y : X \longrightarrow X$ - rzut ortogonalny zadany wzorem $P_Y x = \sum_{j\in J} \alpha_j f_j$

Zbieżność:

$F \subset J$ - skończony podzbiór oraz $\sum_{j\in F} \alpha_j f_j$

Wtedy $x = \underbrace{\sum_{j\in F} \alpha_j f_j}_{x_1} + \underbrace{\left(x - \sum_{j\in F} \alpha_j f_j\right)}_{x_2}$

Sprawdzamy, że $\langle x_1 | x_2 \rangle = 0$. Zatem z tw. Pitagorasa

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \sum_{j\in F} |\alpha_j|^2$$

Ciąg uogólniony $F \longmapsto \sum_{j\in F} \alpha_j f_j$ jest Cauchy'ego. Granica oznaczamy $\sum_{j\in J} \alpha_j f_j$.