$\mathcal{H} \supset \mathcal{D}(A)$ – dziedzina operatora A, na przykład $\mathcal{D}(A) = \{ f \in C^1[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi) \} \subset L^2([0,2\pi]) = \mathcal{H}$

$A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ $\quad Af = \frac{1}{i} f'$. Na przykład wielomiany trygonometryczne stanowią podzbiór $\mathcal{D}(A)$ i $A\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right) = \sum_{n=-N}^{N} n a_n e^{inx}$

Rozważmy operator $B : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{H}$ gdzie $\mathcal{D}(B) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}$.

oraz $B\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}\right) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n e^{inx}$ Zauważmy, że $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$

oraz $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$.

Definicja Niech A, B będą gęsto zdefiniowanymi operatorami na $\mathcal{H}$.

Jeśli $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ oraz $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$ to mówimy B jest rozszerzeniem A i piszemy $A \subset B$. Mówimy też, że A jest zawarty w B.

Wykresem operatora $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ nazywamy podzbiór $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$\left\{ \binom{\xi}{A\xi} : \xi \in \mathcal{D}(A) \right\}$ i oznaczamy $G(A)$. – podprzestrzeń wektorowa $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Zauważmy, że $A \subset B \Leftrightarrow G(A) \subset G(B)$.

Uwaga: Jeśli $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ i A jest operatorem ograniczonym to $G(A)$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

$\binom{\xi_n}{A\xi_n} \in G(A)$ i $\binom{\xi_n}{A\xi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \binom{x}{y} \Rightarrow \xi_n \to x$ zatem $A\xi_n \to Ax = y$ a stąd $\binom{x}{y} = \binom{x}{Ax} \in G(A)$ ∎

Okazuje się też, że $D(A)=\mathcal{H}$ oraz $G(A)$ jest domknięty to A jest ograniczony.

Definicja Mówimy, że operator $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ jest

(i) domknięty jeśli $G(A)$ jest domkniętą podprzestrzenią.

(ii) domykalny jeśli istnieje operator domknięty B t. że $A \subset B$.

Przykład (ćwiczenia) $Af = \frac{1}{i} f'$ jest domykalny (ale nie jest domknięty)

Natomiast $B \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n e^{inx}$ jest domknięty.

Domykalność. Przypuśćmy, że A jest domykalny. Rozważmy $\overline{G(A)}$. Wówczas istnieje operator $C: \mathcal{D}(C) \to \mathcal{H}$ t. że $G(C)=\overline{G(A)}$ (oznaczenie: $C=\bar{A}$, C nazywamy domknięciem A)

Wystarczy sprawdzić, że jeśli $\binom{0}{\eta} \in \overline{G(A)}$ to $\eta = 0$ (*)

Rzeczywiście, przy tym warunku definiujemy C następująco:

① jeśli $\binom{\xi}{\eta_1}, \binom{\xi}{\eta_2} \in \overline{G(A)}$ to $\binom{0}{\eta_1-\eta_2} \in \overline{G(A)} \Rightarrow \eta_1=\eta_2$

② zatem sensowna jest następująca definicja. $D(C) = \{\xi \in \mathcal{H} : \exists \eta \in \mathcal{H}. \binom{\xi}{\eta} \in \overline{G(A)}\}$

oraz $C\xi = \eta$.

Wracając do (*): skoro $\overline{G(A)} \subset G(B)$ to $\binom{0}{\eta} \in \overline{G(A)}$ spełnia $\eta = B0 = 0$.

Na odwrót, jeśli $\overline{G(A)}$ jest wykresem operatora to A jest domykalny.

Wracając do sprzężenia operatora nieograniczonego $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$.

$\mathcal{D}(A^*) = \{ \xi \in \mathcal{H}$: funkcjonał liniowy $\mathcal{D}(A) \ni \eta \longmapsto \langle \xi | A\eta \rangle \in \mathbb{C}$ jest ciągły $\}$.

Wówczas $\exists \; \zeta \in \mathcal{H} : \langle \xi | A\eta \rangle = \langle \zeta | \eta \rangle$ kładziemy $A^*\xi = \zeta$

$= \langle A^*\xi | \eta \rangle$

Definicja Mówimy, że operator A jest

① samosprzężony jeśli $A^* = A$.

② symetryczny jeśli $A \subset A^*$.

Przykład $Af = \frac{1}{i} f'$ jest symetryczny

$B(\sum a_n e^{inx}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n e^{inx}$ jest samosprz.

oraz $B = A^* = \bar{A}$, ćwiczenie.

Twierdzenie Następujące warunki są równoważne

① A jest domykalny

② $\mathcal{D}(A^*)$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{H}$.

Przy tych warunkach zachodzi $A^{**} = \bar{A}$.

Dowód: $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in G(A^*) \iff \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G(A)$ zachodzi

$$\langle \xi | y \rangle = \langle \xi | Ax \rangle = \langle A^*\xi | x \rangle = \langle \eta | x \rangle$$

$$\iff \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G(A) \iff \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G(A)^{\perp}.$$

$A \subset A^*$

Wniosek: A - symetryczny to A^* jest gęsto zdefiniowany a zatem A jest domykalny.

Definicja Mówimy, że sym. operator A jest istotnie samosprzężony jeśli zachodzi jeden z równ. warunków:

(a) $\bar{A} = A^*$

(b) $\bar{A}$ jest op samosprzężonym.

② ⇒ ① – jeśli $\mathcal{D}(A^*)$ jest gęsto oraz wektor $\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix} \in G(A^*)^\perp$ to $\xi = 0$.

Rzeczywiście, wówczas $\left\langle \begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}\zeta\\\eta\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(A^*)$ a więc $\langle \xi | \zeta \rangle = 0$

gdzie ζ przebiega zbiór gęsty $\mathcal{D}(A^*)$ $\Rightarrow \langle \xi | \xi \rangle = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

Skoro
$$\overline{G(A)} = G(A)^{\perp\perp} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ +1 & 0\end{pmatrix} \Big(\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} G(A)^{\perp}}_{=G(A^*)} \Big)^{\perp} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G(A^*)^{\perp}.$$

to jeśli $\begin{pmatrix}0\\\xi\end{pmatrix} \in \overline{G(A)} \Rightarrow \begin{pmatrix}-\xi\\0\end{pmatrix} \in G(A^*)^{\perp} \Rightarrow \xi = 0$, a więc A domykalny.

① ⇒ ② Rozumujemy jak wyżej tylko wstecz.

$A^{**} = \overline{A}$: gdyż
$$G(A^{**}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ +1 & 0\end{pmatrix} G(A^*)^{\perp} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ +1 & 0\end{pmatrix} G(A)^{\perp} \right)^{\perp} = G(A)^{\perp\perp} = \overline{G(A)} = G(\overline{A})$$

Równania różniczkowe cząstkowe.

$u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$

Równanie falowe w n wymiarach u – funkcja $\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty; $u(t,x)$

$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0$ gdzie $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ + warunki początkowe.

Równanie struny $n = 1$
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$