Przypomnienie.

Teoria dystrybucji (1) p-ń funkcji próbnych $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{$ funkcje gładkie o zwartym nośniku $\}$

(2) p-ń Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty$ dla wszystkich $\alpha,\beta \}$

gdzie $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x) \right| < \infty$

$\alpha^i, \beta^j \in \mathbb{N}$. $x^\alpha = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$ $\quad \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$ $\quad |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ $\quad \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ $\quad \beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$

Ciąg $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zbiega do $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jeśli $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Dystrybucją temperowaną nazywamy dowolne liniowe i ciągłe odwzorowanie $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. P-ń dystrybucji temperowanych ozn. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Transformata Fouriera: $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gdzie $(\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e \dots dx$

$$(\mathcal{F}^{-1} g)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(k) e^{ikx} dk$$

Transformata Fouriera dystrybucji temperowanych: jeśli $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ to $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiujemy wzorem $(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}(f)) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Przykłady: $k \in \mathbb{R}^n$, $T_{e^{ikx}}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ikx} dx = (\mathcal{F}f)(k)$. $T_{e^{ikx}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Notacja $\mathcal{F}(T_{e^{ikx}}) \overset{\text{ozn}}{=} \mathcal{F}(e^{ikx}) = ?$

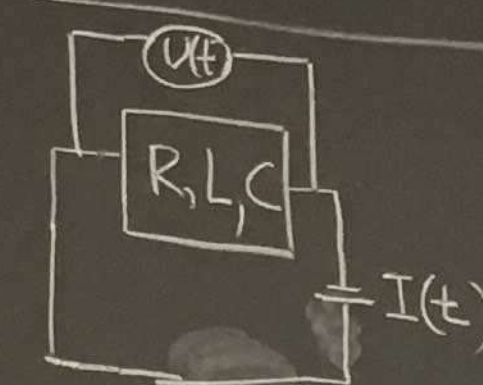
$$\mathcal{F}(e^{ikx})(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{ikx} \mathcal{F}(f)(x) = \frac{(2\pi)^n}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{ikx} \int_{\mathbb{R}^n} dk'\, e^{-ik'x} f(k') = (2\pi)^n f(k) = (2\pi)^n \delta_k(f)$$

Podobnie $T = \delta_x$ $\quad \mathcal{F}(\delta_x)(f) = \delta_x(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(k)\,dk = T_{e^{-ikx}}(f)$.

co zapisujemy następująco $\mathcal{F}(\delta_x)(k) = e^{-ikx}$.

Twierdzenie Payley'a-Wienera.

Wyobraźmy sobie układ R, L, C



Jeśli prąd $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$

to $U(t) = \begin{cases} R I_0 e^{i\omega t} & \text{- dla opornika} \\ i\omega L I_0 e^{i\omega t} & \text{- dla cewki} \\ \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} & \text{- dla kond.} \end{cases}$

Dodatkowe mamy reguły pozwalające wyznaczyć napięcie $U(t) = R(\omega) I_0 e^{i\omega t}$ gdzie $R(\omega) \in \mathbb{C}$. Przykład dla równolegle połączonych opornika i kondensatora mamy

$$\frac{1}{R(\omega)} = \frac{1}{R_0} + i\omega C \Rightarrow R(\omega) = \frac{R_0}{1 + i\omega R_0 C}.$$

Osobliwość $\omega_0 = -\frac{1}{iR_0C} = \frac{i}{R_0C} \in \mathbb{C}_+$

Ogólniej jeśli $I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega)}{2\pi} e^{i\omega t}\,d\omega$ to $U(t) = \int_{\mathbb{R}} R(\omega) \frac{g(\omega)}{2\pi} e^{i\omega t}\,d\omega$. gdzie

$g(\omega) = \int_{\mathbb{R}} I(t') e^{-i\omega t'}\,dt'$. Zatem $U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} d\omega\, R(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}} I(t') e^{-i\omega t'}\,dt' \right) e^{i\omega t}$

$$= \int_{\mathbb{R}} dt' \underbrace{\left(\int \frac{R(\omega)}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}\,d\omega \right)}_{G(t-t')} I(t') = \int_{\mathbb{R}} dt'\, G(t-t') I(t') = U(t).$$

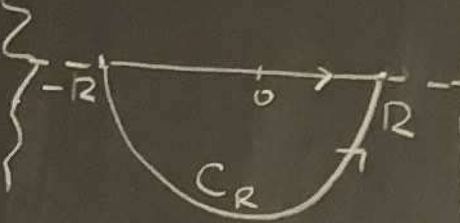
Zasada przyczynowości jeśli $I(t) = 0$ dla $t < 0$ to $U(t) = 0$, $t < 0$.

To oznacza, że $G(t) = 0$ dla $t < 0$. Na przykład $I(t') = \delta_{t_0}(t')$ to

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-t')\,\delta_{t_0}(t')\,dt' = G(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ G(t-t_0) & t \geq t_0. \end{cases}$$

Twierdzenie (Paleya-Wienera)

Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że f ma przedłużenie analityczne do $\mathbb{C}_-$ oraz istnieje $C \in \mathbb{R}_+$ i $M \in \mathbb{R}$ takie, że $|f(z)| \le C e^{M \operatorname{Im} z}$ to $(\mathcal{F} f)(k) = 0$ dla $k > -M$. Na odwrót jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest taka, że $g(k) = 0$ dla $k > -M$ to $\mathcal{F}^{-1}(g)$ ma przedłużenie analityczne $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ oraz istnieje $C > 0$ i $M \in \mathbb{R}$ t. że $|f(z)| \le C e^{M \operatorname{Im} z}$.

Dowód. $\mathcal{F}f(k) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ikx}\, dx = \Big\{$  $\Big\} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \overbrace{f(Re^{i\varphi})}^{\le C e^{MR\sin\varphi}} iRe^{i\varphi} \overbrace{e^{-ikRe^{i\varphi}}}^{\le e^{kR\sin\varphi}}\, d\varphi}_{J(R)}$

Szacowanie: $|J(R)| \le \int_{\pi}^{2\pi} RCe^{(M+k)R\sin\varphi}\, d\varphi$ gdyż $\sin\varphi < 0$ dla $\varphi \in [\pi, 2\pi]$. zatem jeśli $M + k > 0$ to $|J(R)| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

W drugą stronę. Funkcję

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-M} g(k) e^{+ikx}\, dk$$

możemy przedłużyć analitycznie do $\mathbb{C}_-$ wzorem $f : \mathbb{C}_- \ni z \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} g(k) e^{ikz}\, dk$. Czy ta całka jest zbieżna.

Zauważmy, że $|e^{ikz}| = \{z = x + iy\} = |e^{ikx} e^{-ky}| = e^{-ky} = e^{-k \operatorname{Im} z} = \left\{ \begin{matrix} k \le -M,\ \operatorname{Im} z < 0 \\ -k \ge M \\ -k \operatorname{Im} z \le M \operatorname{Im} z \end{matrix} \right\}$

$\le e^{M \operatorname{Im} z}$. Stąd powyższa całka jest zbieżna.

i f jest analityczną funkcją na $\mathbb{C}_-$ przedłużającą $\mathcal{F}^{-1} g$. Ponadto.

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-M} |g(k)|\, |e^{ikz}| \le \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|\, dk \right) \cdot e^{M \operatorname{Im} z} \quad \square$$

$\delta(p^2-m^2)$ - później.

Szeregi Fouriera dystrybucji okresowych.

$\delta_p^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(p)$

Przykłady dystrybucji temperowanych $\delta_p^{(n)}$ gdzie $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,dt$ gdzie f - ograniczona

Sz. F. funkcji okresowych: $f \in C(\mathbb{R})$ - okresowa o okresie 2π $f(x+2\pi) = f(x)$.

Na przykład e^{inx}, n - ustalona całkowita liczba. Współczynniki Fouriera f $C_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$. Szereg Fouriera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi} e^{inx}$. Bywa tak, że $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{2\pi} e^{inx}$ i szereg jest jednostajnie zbieżny.

Definicja Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ oraz $h \in \mathbb{R}$. Przesunięciem dystrybucji T o $h \in \mathbb{R}$ nazywamy dystrybucję $\tau_h T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ daną wzorem $(\tau_h T)(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi)$ gdzie $(\tau_{-h}\varphi)(t) = \varphi(t+h)$

Dlaczego tak? $(\tau_{+h} T_f)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t+h)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-h)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (\tau_h f)(t)\varphi(t)\,dt = T_{\tau_h f}(\varphi)$.

Definicja: Mówimy $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ jest 2π-okresowa jeśli $\tau_{2\pi} T = T$.

Przypomnienie: sumacyjny wzór Poissona. $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ $\{ T(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n) \}$

$(\tau_{2\pi}\delta_{2\pi k})(\varphi) = \delta_{2\pi k}(\varphi(t+2\pi)) = \varphi(2k\pi + 2\pi) = \delta_{2(k+1)\pi}(\varphi)$. Stąd $\tau_{2\pi}(T) = T$.

Wzór sumacyjny

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(2\pi n) = (\mathcal{F}T)(\varphi)$

$\mathcal{F}T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$

Regularne dystrybucje okresowe, na przykład $T_{e^{int}}$.

Stwierdzenie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ spełnia $\tau_h T = T$ wtedy i tylko wtedy gdy $e^{-ih\omega}\mathcal{F}T = \mathcal{F}T$

Dowód: $\mathcal{F}(\tau_h T)(\varphi) = (\tau_h T)(\mathcal{F}\varphi) = T(\tau_{-h}\mathcal{F}\varphi) = \{ \tau_{-h}(\mathcal{F}\varphi)(t) = (\mathcal{F}\varphi)(t+h) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega) e^{-i\omega(t+h)}\,d\omega =$
$= \int_{\mathbb{R}} (e^{-i\omega h}\varphi) e^{-i\omega t}\,d\omega = \mathcal{F}(e^{-ih\cdot}\varphi) \} = T(\mathcal{F}(e^{-ih\omega}\varphi)) = (e^{-ih\omega}\mathcal{F}T)(\varphi) \overset{\text{zał}}{=} (\mathcal{F}T)(\varphi)$

Wniosek: T jest 2π okresowa $\Leftrightarrow$ $(1 - e^{-2\pi i\omega}) \cdot \mathcal{F}T = 0$.

Funkcja $1-e^{-2\pi i\omega}$ zeruje się tylko dla $\omega\in\mathbb{Z}$. Zatem $\mathrm{supp}(\mathcal{F}T)\subset\mathbb{Z}$. Zatem istnieją dystrybucje $S_n\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ t. że $\mathrm{supp}\, S_n=\{n\}$ oraz $\mathcal{F}T=\sum_{n\in\mathbb{Z}}S_n$.

$\delta_p^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\varphi^{(n)}(p)$

Przykłady dystrybucji temperowanych $\delta_p^{(n)}$ gdzie $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}$. $T_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\varphi(t)\,dt$ gdzie f - ograniczona

Rozważmy S_0. $(1-e^{-2\pi i\omega})S_0=0.\Rightarrow \frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\omega}\,\omega\cdot S_0=0\Rightarrow \omega\cdot S_0=0\Rightarrow \exists\, c_0\in\mathbb{C}: S_0=c_0\delta_0$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{1-(1-2\pi i\omega)}{\omega}=2\pi i$$

Podobnie, istnieją stałe $c_n\in\mathbb{C}$ t. że $S_n=c_n\delta_n$

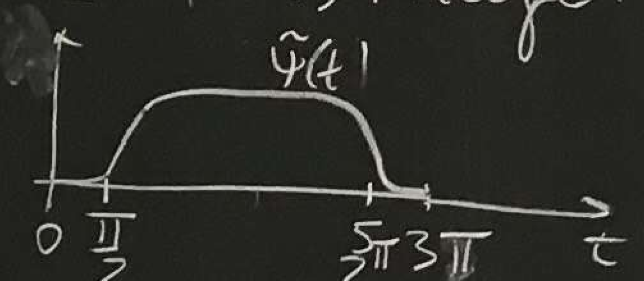
Wniosek $(\mathcal{F}T)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n}{2\pi}2\pi\delta_n$. Skoro $\mathcal{F}(e^{int})=2\pi\cdot\delta_n$, czyli $T=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n}{2\pi}e^{int}$ i widać $T(\varphi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\cdot e^{int}\,dt$.

Obliczanie c_n. Ustalmy funkcję $\psi\geq 0$ t. że $\mathrm{supp}\,\psi\subset\,]0,3\pi[$ oraz $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(t+2k\pi)=1$

$\psi_{2k\pi} = \tau_{2k\pi}\psi$.

Czy takie ψ istnieje. Weźmy $\tilde\psi\geq 0$ $\mathrm{supp}\,\tilde\psi\subset\,]0,3\pi[$ & $\tilde\psi>0$ dla $t\in\,]\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi[$.

Rys $\tilde\psi$



$\tilde{\tilde\psi}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde\psi(t+2k\pi)$. Zauważmy, że $\tilde{\tilde\psi}>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Definiujemy $\psi=\frac{\tilde\psi}{\tilde{\tilde\psi}}$. Obliczanie c_n: $(\mathcal{F}T)(\varphi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\varphi(n)$ (**) + (*) $\Rightarrow$ $\boxed{c_n=T(\psi e^{-itn})}$

$$= T(\mathcal{F}\varphi)=T\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_{2k\pi}\mathcal{F}\varphi\Big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}T(\psi_{2k\pi}(\mathcal{F}\varphi))=\sum_{k\in\mathbb{Z}}T(\tau_{2k\pi}(\psi\cdot\tau_{-2k\pi}\mathcal{F}\varphi))=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}T(\psi\cdot\tau_{-2k\pi}(\mathcal{F}\varphi))=T\Big(\psi\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tau_{-2k\pi}\mathcal{F}\varphi\Big)=$$

$$\tau_{2k\pi}(\mathcal{F}\varphi)(t)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\omega)e^{-i\omega(t+2k\pi)}\,d\omega=\mathcal{F}(\varphi\cdot e^{-i\omega t})(2k\pi)$$

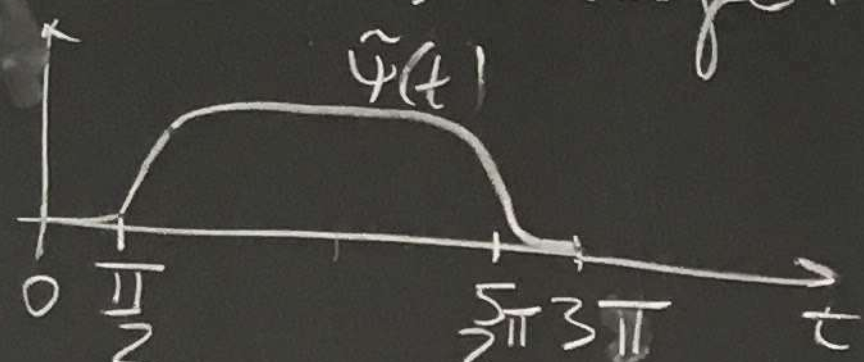
$$=T\Big(\psi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(e^{-it\cdot}\varphi)(2k\pi)\Big)=T\Big(\psi\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-itk}\cdot\varphi(k)\Big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(k)\,T(\psi e^{-itk})\ (*)$$

Obliczanie c_n. Ustalmy funkcję $\Psi \geq 0$ t. że $\operatorname{supp}\Psi \subset]0,3\pi[$ oraz $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Psi(t+2k\pi)=1$

$\Psi_{2k\pi} = \tau_{2k\pi}\Psi$.

Czy takie Ψ istnieje. Weźmy $\tilde\Psi \geq 0$ $\operatorname{supp}\tilde\Psi \subset]0,3\pi[$ & $\tilde\Psi>0$ dla $t\in]\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi[$.

Rys $\tilde\Psi$



$$\tilde{\tilde\Psi}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde\Psi(t+2k\pi)$$

Zauważmy, że $\tilde{\tilde\Psi}>0$ $\forall_{t\in\mathbb{R}}$

Definiujemy $\Psi = \frac{\tilde\Psi}{\tilde{\tilde\Psi}}$. Obliczanie c_n: $(\mathcal{F}T)(\varphi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi(n)$ (**) + (*) $\Rightarrow$ $\boxed{c_n = T(\Psi e^{-itn})}$

$$\Leftarrow T(\mathcal F\varphi) = T\Big(\sum_{k\in\mathbb Z} \Psi_{2k\pi}\mathcal F\varphi\Big) = \sum_{k\in\mathbb Z} T(\Psi_{2k\pi}(\mathcal F\varphi)) = \sum_{k\in\mathbb Z} T(\tau_{2k\pi}(\Psi\cdot\tau_{-2k\pi}\mathcal F\varphi)) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb Z} T(\Psi\cdot\tau_{-2k\pi}(\mathcal F\varphi)) = T\Big(\Psi\cdot\Big(\sum_{k\in\mathbb Z} \tau_{-2k\pi}\mathcal F\varphi\Big)\Big) =$$

$$\tau_{-2k\pi}(\mathcal F\varphi)(t) = \int_{\mathbb R}\varphi(\omega)e^{-i\omega(t+2k\pi)}d\omega = \mathcal F(\varphi\cdot e^{-i\omega t})(2k\pi)$$

$$= T\Big(\Psi\sum_{k\in\mathbb Z} \mathcal F(e^{-it\cdot}\varphi)(2k\pi)\Big) = T\Big(\Psi\sum_{k\in\mathbb Z} e^{-itk}\cdot\varphi(k)\Big) = \sum_{k\in\mathbb Z}\varphi(k)\, T(\Psi e^{-itk}) \quad (*)$$

f - funkcja 2π-okresowa

$$T_f(\Psi e^{-itk}) = \int \Psi(t)e^{-itk}f(t)dt = \int_0^{2\pi}\Psi(t)e^{-itk}f(t) + \int_{2\pi}^{4\pi}\Psi(t)e^{-itk}f(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\underbrace{(\Psi(t)+\Psi(t+2\pi))}_{=1}\cdot e^{-itk}f(t)dt = \int_0^{2\pi}e^{-itk}f(t)dt$$ – współczynniki Fouriera funkcji f