Nośnik funkcji: $\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}}$   $f:\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \mathbb{R}$   $\mathrm{supp}\, e^{-x^2}=\mathbb{R}$   $\mathrm{supp}\,\theta = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ Nośnikiem $T$ ($\mathrm{supp}\,T$) nazywamy najmniejszy podzbiór domknięty $\mathbb{R}^n$ taki, że jeśli $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathrm{supp}\,\varphi\cap\mathrm{supp}\,T=\emptyset$ to $\langle T,\varphi\rangle = 0$.

Przykład $\mathrm{supp}\,T_f = \mathrm{supp}\,f$. $\mathrm{supp}\,\delta_0^{(n)} = \{0\}$

Dystrybucje $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ które mają zwarty nośnik dają się rozszerzyć do wszystkich funkcji gładkich. Niech $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathrm{supp}\,T$ – zwarty. Istnieje funkcja $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\varphi|_{\mathrm{supp}T}=1$ (patrz rozkład jedności). Zauważmy, że $\varphi\cdot T=T$. Definiujemy $\langle T,f\rangle := T(\varphi f)$. Konstrukcja nie zależy od $\varphi$. Ogólniej mając dowolną dystrybucję $T$ oraz $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t. że $K=\mathrm{supp}\,T\cap\mathrm{supp}\,f$ jest zwarty definiujemy $\langle T,f\rangle$ następująco. Niech $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\varphi|_K=1$.

Kładziemy $\langle T,f\rangle \equiv T(\underbrace{\varphi\cdot f}_{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)})$. Konstrukcja jest niezależna od wyboru $\varphi$.

Jeśli $\tilde\varphi|_K=1$ oraz $\tilde\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ to $T(\varphi f) = \underbrace{T((\varphi-\tilde\varphi)\cdot f)}_{=0} + T(\tilde\varphi\cdot f)$ gdyż $\mathrm{supp}\,f(\varphi-\tilde\varphi)\cap\mathrm{supp}\,T=\emptyset$

Iloczyn tensorowy funkcji $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ to $f\otimes g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ defin. wzorem $(f\otimes g)(x,y) = f(x)\,g(y)$ $\forall\, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$. Jeśli $\varrho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ to $\varrho_x:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ definiujemy wzorem $\varrho_x(y)=\varrho(x,y)$ & ${}_y\varrho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ wzorem ${}_y\varrho(x)=\varrho(x,y)$.

Zauważmy, że $T_{f\otimes g}(\varrho) = \int dx\,dy\, f(x)\,g(y)\,\varrho(x,y) = T_f(T_g(\varrho_x)) = T_g(T_f({}_y\varrho))$ t. że

Def: Iloczynem tensorowym $T\otimes S$ dystrybucji $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ nazywamy dystrybucję $(T\otimes S)(\varrho)=T(S(\varrho_x))$

Uwaga: Funkcja $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto S(\varphi_x) \in \mathbb{C}$ jest funkcją próbną a więc $T(S(\varphi_x))$ jest dobrze określone i definiuje $T \otimes S$.

Przykład $\langle \underbrace{vp\left(\frac{1}{x}\right)}_{T}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \right)$  $S = \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$. $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\left(vp\left(\frac{1}{x}\right) \otimes \delta_a\right)(\varphi) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x,a)}{x} dx$$

Splot funkcji oraz splot dystrybucji

Jeśli $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ to ich splot $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest dany wzorem $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$.

Stwierdzenie $\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$.

$$\mathcal{F}(f*g)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} (f*g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(y) g(\overbrace{x-y}^{\tilde{x} = x-y}) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-ik(\tilde{x}+y)} f(y) g(\tilde{x}) dy d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iky} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\tilde{x}} g(x) dx$$

Wniosek splot funkcji jest łączny oraz przemienny

Notacja: jeśli $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ to symbolem $(t^* \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dany wzorem $(t^*\varphi)(x,y) = \varphi(x+y)$. Źródłem tej notacji jest $t: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gdzie $t(x,y) = x+y$.

Obserwacja $T_{f*g}(\varphi) \underset{\uparrow \text{ćwiczenie}}{=} (T_f \otimes T_g)(t^*\varphi) = \int f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy$

Stwierdzenie/definicja.

Niech $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oraz $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ będzie dystrybucją o zwartym nośniku. Wówczas $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\boxed{\operatorname{supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{supp}(t^*\varphi)}$ jest zwarty. Zatem możemy zdefiniować splot $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, t^*\varphi \rangle$.

Aproksymacje $\delta_0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ "Ogólniej" $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,dx = 1$.

$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ t.zn. $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)\psi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \psi(0)$.

Przykład $\boxed{T*\delta_0 = T}$ $\quad (\delta_0*T)(\varphi) = (T*\delta_0)(\varphi) = (T\otimes\delta_0)(t^*\varphi) = T\left(\delta_0\left((t^*\varphi)_x\right)\right) = T\left((t^*\varphi)_x(0)\right) = T(\varphi)$

gdyż $(t^*\varphi)_x(0) = \varphi(x+0) = \varphi(x)$

Rozważmy splot $\underline{\varphi_\varepsilon * T} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} T$.

Stwierdzenie $\varphi_\varepsilon * T$ jest dystrybucją regularną.

Dowód $\langle g*T,\varphi\rangle = T\left(\int_{\mathbb{R}} g(\underset{\tilde x - y}{x})\varphi(\underset{\tilde x}{x+y})\,dx\right) = T\int g(\tilde x - y)\varphi(\tilde x)\,d\tilde x$

$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{T(g_{\tilde x}(\cdot - y))}_{f}\varphi(\tilde x)\,d\tilde x$ $\quad$ $\{T$ jest dystrybucją w zmiennej $y$

zdefiniujmy $f(\tilde x) = T(g_{\tilde x}(\cdot - y))$. Wówczas $g*T = T_f$ ☐

Obraz prosty i odwrotny dystrybucji

Niech będzie dane odwzorowanie $\phi: \underset{\mathbb{R}^n}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{\tilde\Omega}$ i niech $\varphi\in\mathcal{D}(\tilde\Omega)$ $\quad \varphi \to \mathbb{C}$

Wówczas funkcja $\varphi\circ\phi \in C^\infty(\Omega)$ i niekoniecznie o zwartym nośniku.

Jeśli $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ ma zwarty nośnik to definiujemy $\phi_*T \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ wzorem $\langle(\phi_*T),\varphi\rangle = \langle T,\varphi\circ\phi\rangle$. Przykład $\langle\phi_*\delta_a,\varphi\rangle = \langle\delta_a,\varphi\circ\phi\rangle = \varphi(\phi(a)) = \delta_{\phi(a)}(\varphi)$