σ - algebry, X, $\mathcal{P}$ - rodzina podzbiorów X: $A, B, (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $A\cap B \in \mathcal{P}$, $X \in \mathcal{P} \Rightarrow A^c = X\setminus A$

$m: \mathcal{P} \to [0,\infty]$, $m\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} m(A_i)$

miara na $(X, \mathcal{P})$

Przykład 0) $X_n = \{1, \dots, n\}$ $m(A) = |A|$ - liczba elementów A. $\mathcal{P} = 2^{X_n}$

1) $X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A. \end{cases}$ $\mathcal{P} = 2^{\mathbb{R}}$

2) Miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Y - dowolny zbiór, 2^Y - wszystkie podzbiory zbioru Y.

Terminologia elementy $\mathcal{P}$ nazywamy zbiorami mierzalnymi, a $m(A)$ nazywamy miarą zbioru A.

Stwierdzenie Niech $m: \mathcal{P} \to [0,\infty]$ będzie miarą na $\mathcal{P}$. Wówczas

① $m(A\cup B) + m(A\cap B) = m(A) + m(B)$

② $m(A) = m(A\setminus B) + m(A\cap B)$ $\Bigg\}$ $A, B \in \mathcal{P}$.

③ $A \subset B \Rightarrow m(A) \le m(B)$

④ Jeśli $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$ to $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(A_i)$

Dowód. $A = A\setminus B \sqcup A\cap B \Rightarrow$ ② Zatem $\overset{A\subset B}{m(B)} = m(A) + m(B\setminus A) \ge m(A) \Rightarrow$ ③.

$A\cup B = A\setminus B \sqcup B \Rightarrow m(A\cup B) = m(A\setminus B) + m(B)$ i korzystając z ② $\Rightarrow$ ①.

Punkt ④: Dla $i = 1$: $B_1 = A_1$ dla $i > 1$ $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. $B_k \cap B_l = \emptyset$ & $\bigcup B_i = \bigcup A_i$

Zatem $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} m(B_i)\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

Miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$.

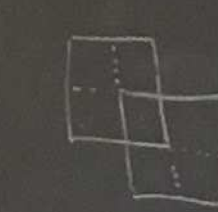
Definicja Odcinkiem w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\}$ $< \in \{<, \leq\}$

Miarą D nazywamy liczbę $\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ i ozn $m(D)$

Zbiór $A = \bigsqcup_{k=1}^{l} D_k$ nazywamy elementarnym i klasę tych zbiorów ozn. $\mathcal{E}$

Stwierdzenie Jeśli $A, B \in \mathcal{E}$ to $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{E}$.

Dowód. Zauważmy przecięcie odcinków jest odcinkiem.



stąd $A = \bigsqcup_{k=1}^{l} D_k$ $B = \bigsqcup_{j=1}^{l'} D_j'$, $A \cap B = \bigsqcup_{k,j} \underbrace{D_k \cap D_j'}_{\text{odcinki}}$.

$A \setminus B = A \cap B^c$ $B^c = X \setminus B$

$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{l} D_k \cap \bigcap_{j=1}^{l'} D_j'^c = \bigsqcup_{k=1}^{l} \bigcap_{j=1}^{l'} (D_k \setminus D_j')$ - zbiór element.

$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ - zbiór elementarny

Stwierdzenie $A \in \mathcal{E}$, $A = \bigsqcup_{k=1}^{l} D_k = \bigsqcup_{j=1}^{l'} D_j'$ Wówczas $\sum_{k=1}^{l} m(D_k) = \sum_{j=1}^{l'} m(D_j')$.

$\sum_k \Big\{ m(D_k) = m\big(\bigsqcup_j D_k \cap D_j'\big) = \sum_j m(D_k \cap D_j')$

$\sum_{k=1}^{l} m(D_k) = \sum_{k,j} m(D_k \cap D_j') = \sum_j \sum_k m(D_k \cap D_j') = \sum_j m(D_j')$ $\boxtimes$

Definicja $A \in \mathcal{E}$ to $m(A) = \sum_{k=1}^{l} m(D_k)$

Własności m: addytywność $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow m\big(\bigsqcup_{k=1}^{l} A_k\big) = \sum_{k=1}^{l} m(A_k)$.

$A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

Czy m jest σ-addytywne.

Stwierdzenie Jeśli $A \in \Sigma$ oraz $\varepsilon > 0$ to istnieje $F, G \in \Sigma$ gdzie F otwarty G jest domknięty oraz $m(G) - \varepsilon \leqslant m(A) \leqslant \varepsilon + m(F)$

Dowód $A = \bigsqcup_{i=1}^{l} D_i$. Niech $O_i \underset{OTW}{\subseteq} D_i$: $m(O_i) + \frac{\varepsilon}{l} \geqslant m(D_i)$ $\left\{ O_i; Q_i \text{ – odcinki} \right.$

i niech $Q_i \underset{DOMK}{\supseteq} D_i$: $m(Q_i) - \frac{\varepsilon}{l} \leqslant m(D_i)$. Kładziemy $F = \bigsqcup_{i=1}^{l} O_i$, $G = \bigcup_{i=1}^{l} Q_i$

$$\sum_{i=1}^{l} \left(m(Q_i) - \frac{\varepsilon}{l}\right) \leqslant m(A) = \sum_{i=1}^{l} m(D_i) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \left(m(O_i) + \frac{\varepsilon}{l}\right) = m(F) + \varepsilon$$

$$\overset{(*)}{\geqslant} m(G) - \varepsilon.$$

$$\boxed{\begin{gathered} A = \bigcup_{i=1}^{l} D_i \quad (*) \\ m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{l} m(D_i) \end{gathered}}$$

Definicja Niech $E \subset \mathbb{R}$. Miarę zewnętrzną $\mu^*(E)$ zbioru E definiujemy następująco:

$$\mu^*(E) = \inf_{(A_i)_{i \in \mathbb{N}}} \sum m(A_i) \quad \text{gdzie } A_i \in \Sigma \text{ oraz } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Kartkówka:

Znaleźć wszystkie dystrybucje $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ spełniające równanie

$T + xT' = 1$. Wsk. $(xT)' = T + xT'$.