Miara Lebesgue'a μ na $\mathbb{R}^k$

- zbiory otwarte/domknięte są mierzalne.
- zbiory miary zero w sensie Lebesgue'a są mierzalne oraz $\mu(A)=0$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest —||—||—||—||— jeśli $\forall_{\varepsilon>0}$ istnieją odcinki $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ t. że $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} m(D_i) < \varepsilon$

(Ćwiczenia).

Całkowanie funkcji prostych $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\chi_{A_i}(x)}_{\text{f. char. zb. } A_i}$ $\alpha_i \in [0,\infty[$, $\underbrace{A_i \cap A_j}_{\text{zbiory mierzalne}} = \emptyset$.

Ustalmy zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}^n$ i definiujemy $\int_A s\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \mu(A_i \cap A)$

Stwierdzenie ① $\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} s\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} s\,d\mu$ ② $\int_B \alpha s\,d\mu = \alpha \int_B s\,d\mu$ $\forall \alpha \in [0,\infty[$.

③ $\int_B (s_1+s_2)\,d\mu = \int_B s_1\,d\mu + \int_B s_2\,d\mu$ ④ $s_1 \le s_2$ to $\int_B s_1\,d\mu \le \int_B s_2\,d\mu$

Dowód ① wynika z równości $\mu\left(A_j \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap B_i)$.

② - oczywisty; ③ $s_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i,j} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}$, $s_2 = \sum_{j=1}^{k_2} \beta_j \chi_{B_j} = \sum_{i,j} \beta_j \chi_{B_j \cap A_i}$

$$\int_B (s_1+s_2)\,d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_i+\beta_j)\,\mu(B\cap A_i \cap B_j) = \underbrace{\sum_i \alpha_i \underbrace{\sum_j \mu(B\cap A_i\cap B_j)}_{\mu(B\cap A_i)}}_{\int_B s_1\,d\mu} + \underbrace{\sum_j \beta_j \underbrace{\sum_i \mu(B\cap B_j\cap A_i)}_{\mu(B\cap B_j)}}_{\int_B s_2\,d\mu}$$

④ $s_1 = \sum_{i,j} \gamma_{ij}\, \chi_{A_i \cap B_j}$ $s_2 = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, \chi_{A_i \cap B_j}$ gdzie $\gamma_{ij} \le \delta_{ij}$ gdy $s_1 \le s_2$

dalej oczywiste. □

$f: \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ - mierzalna, $B \subset \mathbb{R}^k$ - mierzalny

definiujemy $\int_B f\, d\mu = \sup_{s \le f} \int_B s\, d\mu$ $S_N = \sum_{j=0}^{N2^N} \frac{j}{2^N} \chi_{A_j}$ $\mathbb{R}^k \supset A_j = f^{-1}\left(\left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right[\right)$, $A_{N2^N} = f^{-1}([N, \infty[)$

$\forall N \in \mathbb{N}$ $S_N \le f$ oraz $S_N(x) \nearrow_{N \to \infty} f(x)$

Stwierdzenie $f_n: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ - są mierzalne ograni. ① $\sup f_n$

② $\inf f_n$ ③ $\limsup f_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \ge n} f_k = \inf_n (\sup_{k\ge n} f_k)$ ④ $\liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} f_k = \sup_n \inf_{k \ge n} f_k$ są mierzalne

Dowód ① $f = \sup_n f_n$, $a \in \mathbb{R}$ $\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$.

← mierzalny

② $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ - mierzalna.

③ → oczywiste ← ④

Wniosek: Jeśli $\forall_{x \in \mathbb{R}^k}$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ oraz f_n - mierzalne to f - mierzalna

gdyż $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$.

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej

$f_n : \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ - mierzalne, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ i $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\, d\mu = \int_B f(x)\, d\mu$.

Dowód. Skoro $f_n(x) \le f(x)$ to $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\mu \le \int_B f \, d\mu \; (= \sup_{s \le f} \int s \, d\mu)$.

Ustalmy $s: \mathbb{R}^k \to [0,\infty[$ t. że $s \le f$ i niech $\Theta \in \,]0,1[$.

Rozważmy zbiory $B_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \Theta \cdot s(x) \le f_n(x)\}$ - mierzalne.

Zauważmy, że $B_{n+1} \supset B_n$ oraz $\mathbb{R}^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \xleftarrow{n\to\infty} \int_B f_n \, d\mu \ge \int_{B\cap B_n} f_n \, d\mu \ge \Theta \int_{B\cap B_n} s \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \Theta \int_B s \, d\mu \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\mu \ge \int_B f \, d\mu \quad \square$$

Wniosek: • $\int_B s_N \, d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_B f \, d\mu$ • $\int_B (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_B f_1 \, d\mu + \int_B f_2 \, d\mu$

Całka z funkcji zespolonej:

① Jeśli $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ - mierzalna to niech $f^+ = \max(0, f)$ i $f^- = \max(0, -f)$. Wówczas $f = f^+ - f^-$ i jeśli $\underbrace{\int_B f^+ \, d\mu, \int_B f^- \, d\mu < \infty}_{\text{mówimy, że } f \text{ jest całkowalna na } B.}$ to $\int_B f \, d\mu \overset{def}{=} \int_B f^+ \, d\mu - \int_B f^- \, d\mu$.

② Ogólniej, jeśli $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ - mierzalna i $\underbrace{\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \text{ są całkowalne}}_{f \text{ - całkowalna na } B.}$ na B to $\int_B f \, d\mu \overset{def}{=} \int_B \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_B \mathrm{Im} f \, d\mu$

$\mathcal{L}^1(f, B, d\mu)$ - zbiór całkowalnych na B.

$\int_B \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_B \mathrm{Im} f \, d\mu$ f - całkowalna na B, $\mathcal{L}^1(B, d\mu)$ - zbiór całkowalnych na B,

Fakt 1

$f \in \mathcal{L}^1(B, d\mu) \iff \int_B |f| \, d\mu < \infty.$ Ponadto $\left|\int_B f \, d\mu\right| \le \int_B |f| \, d\mu$

Dowód $\Leftarrow$ $\mathrm{Re} f^+, \mathrm{Re} f^-, \mathrm{Im} f^+, \mathrm{Im} f^- \le |f|$

$\Rightarrow$ $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2} \le \sqrt{2} \max(|\mathrm{Re} f|, |\mathrm{Im} f|) \le \sqrt{2}(|\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f|)$

Skoro: $\int_B |\mathrm{Re} f| \, d\mu = \int_B \mathrm{Re} f^+ \, d\mu + \int_B \mathrm{Re} f^- \, d\mu < \infty \Rightarrow \int_B |f| \, d\mu < \infty.$

$\int_B |\mathrm{Im} f| \, d\mu = \dots < \infty$

$\exists \varphi \in [0, 2\pi[$

$\left|\int_B f \, d\mu\right| = e^{i\varphi} \int_B f \, d\mu = \int_B e^{i\varphi} f \, d\mu = \int_B \mathrm{Re}(e^{i\varphi} f) \, d\mu \le \int_B |e^{i\varphi} f| \, d\mu = \int_B |f| \, d\mu.$ ∎