Przypomnienie: $f_n: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ $\quad f_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\, d\mu(x)$.

Twierdzenie (O zbieżności zmajoryzowanej)

Niech $f_n: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ mierzalne $\Longrightarrow$ oraz $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ mierzalna gdzie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Jeśli istnieje funkcja $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ t. że ① $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^k$

② $\int_{\mathbb{R}^k} g(x)\, d\mu(x) < \infty$. Wówczas $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\, d\mu(x)$

$\mu(dx) = d\mu(x) = d\mu$.

Terminologia: g nazywamy majorantą ciągu f_n.

Lemat Fatou

Niech $f_n: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ mierzalne. Wówczas $\int_{\mathbb{R}^k} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) \overset{\checkmark}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x)$

Dowód. $\tilde{f}_n(x) = \inf_{k \ge n} f_k(x)$ - rosnący ciąg funkcyjny.

$\tilde{f}_n(x) \le f_n(x) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}_n(x)\, d\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\, d\mu(x)$. Stosując $\liminf_{n\to\infty}$ do obu stron

dostajemy $\lim_{k\to\infty} \int \tilde{f}_n(x)\, d\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}_n(x)\, d\mu(x) \le \liminf \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\, d\mu(x)$

bo ciąg rośnie

|| Tw. o zb. monot.

$\int_{\mathbb{R}^k} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)\, d\mu(x)$

Dowód tw. o zb. zmajoryzowanej.

Wystarczy wykazać tw. przy zał. że $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$.

Z Lematu Fatou: $\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x)$.

Ponadto $g - f_n \geq 0$ i stosując lemat Fatou do $g - f_n$ oraz równość $\liminf_{n\to\infty}(g - f_n) = g - f$ dostajemy

$$\int (g-f)(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)(x)\,d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)(x)\,d\mu(x) = \int g(x)\,d\mu(x) - \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x)$$

$\int g < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^k} g(x)\,d\mu - \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x) \implies \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x).$$

Zatem: oraz $\int_{\mathbb{R}^k} f_n(x)\,d\mu(x)$ jest zbieżny do $\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mu(x)$ ∎

Przestrzenie: $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$ oraz $L^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$; $\infty > p \geq 1$.

$= \{ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|^p\,d\mu(x) < \infty \}$. Oznaczmy $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Stwierdzenie $\|f\|_p = 0 \iff f$ jest równa zero prawie wszędzie (w sensie miary Lebesgue'a) tzn. $\mu(\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \neq 0\}) = 0$.

Czy $\|\cdot\|_p$ spełnia nierówność tr. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$?

① $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$ jest p-nią wektorową gdyż $|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le$
$2^p \max(|f|^p, |g|^p) \le 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} |f+g|^p d\mu \le 2^p \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f|^p d\mu + \int_{\mathbb{R}^k} |g|^p d\mu \right) < \infty$,

Twierdzenie (Nierówność Höldera). $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k, d\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^k, d\mu)$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
to $\left| \int_{\mathbb{R}^k} f \cdot g \, d\mu \right| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Dowód: Wystarczy dla $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, Wypukłość funkcji exp: $e^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y} \le \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y$
Kładziemy $x = \log |f|^p$, $y = \log |g|^q$; $\Longrightarrow |f| \cdot |g| \le \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |g|^q \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} |f||g| d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q$

3

Twierdzenie (Nierówność Minkowskiego) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Dowód $|f+g|^p \le (|f|+|g|) |f+g|^{p-1} = |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| |f+g|^{p-1}$

zatem $\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^1 \le \int_{\mathbb{R}^k} |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu$

$\underset{\text{n. Höldera}}{\le} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$ $\quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$,

$= \|f\|_p + \|g\|_p \left(\int |f+g|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \Longrightarrow \underbrace{\left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|f+g\|_p} \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Cwicz...