Seria Zadań nr.2 z Geometrii Różniczkowej

Zadanie 1. Znaleźć równanie 2-wymiarowej powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że płaszczyzna styczna w punkcie $p \in M$ zawiera punkty: $(x(p), 0, 0)$, $(0, y(p), 0)$ i $(0, 0, z(p))$ i dla każdego punktu p spełnione jest równanie

$$x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = a^2 = const.$$

Zadanie 2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x_1x_2 + x_3x_4$ na zbiorze $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \sum_1^4 x_i^2 = 1,\ x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4)\}$.

Zadanie 3. Wstęga Möbiusa: na zbiorze $X = [0, 1]\times] - 1, 1[$ wprowadzamy relację równoważności $(0, t) \sim (1, -t)$. Wstęgą Möbius nazywamy zbiór $\mathrm{MB} = X/\sim$. Zdefiniujmy atlas złożony z dwóch map:

- $\phi_1^{-1} :]0, 1[\times] - 1, 1[\to \mathrm{MB} : \quad \phi_1(x, t) = (x, t)$
- $\phi_2^{-1} :] - 1/4, 1/4[\times] - 1, 1[\to \mathrm{MB} \quad \phi_1(x, t) = (x, t)$ dla $x \geq 0$ oraz $\phi_1(x, t) = (1 + x, -t)$ dla $x < 0$

a) Udowodnić, że MB z atlasem $\{\phi_1, \phi_2\}$ jest rozmaitością różniczkową.

b) Wykazać, że wiązka styczna $\mathrm{T\,MB}$ nie jest izomorficzna z $\mathrm{MB} \times\mathbb{R}^2$. Wskazówka: Niech X będzie polem wektorowym na MB. We współrzędnych ϕ_1 ma ono postać $X = A(x, t)\partial_x + B(x, t)\partial_t$. Wykazać, że

$$\lim_{x\to 0} B(x, 0) = - \lim_{x\to 1} B(x, 0).$$

Wywnioskować stąd, że dla każdej pary pól wektorowych X_1, X_2 na MB istnieje punkt $p \in \mathrm{MB}$, taki że $X_1(p)$ i $X_2(p)$ są liniowo zależne.

Zadanie 4. Niech

$$Y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left(zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3\backslash\{(0, 0, 0)\}$. Sprawdzić, że X jest styczne do jednostkowej sfery dwuwymiarowej S^2. Wyznaczyć krzywe całkowe pola X na sferze. Zapisać pole X we współrzędnych sferycznych i stereograficznych.

Zadanie 5. Rozważmy polem wektorowe X na $\mathbb{R}^2$:

$$Z = (x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Zapisać Z we współrzędnych biegunowych i znaleźć jego krzywe całkowe. Czy Z jest polem zupełnym?

Zadanie 6. Wykazać, że istnieje nigdzie nieznikające pole wektorowe na sferze nieparzysto-wymiarowej $\mathbf{S}^{2k+1}$.
Wskazówka: ustalmy punkt $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbf{S}^3$. Przestrzeń styczną $\mathrm{T}_p\,\mathbf{S}^3$ można utożsamić z podprzestrzenią $V_p \subset \mathbb{R}^4$ taką że:

$$v \in V_p \Leftrightarrow v_1 p_1 + \ldots v_4 p_4 = 0.$$

Wektor $(p_2, -p_1, p_4, -p_3) \in V_p$. Powyższa konstrukcja łatwo uogólnia się dowolnego nieparzystego wymiaru.