Wykład 11 Matematyka III.

Wzór Cauchy'ego: w - holomorficzne na D

$\Gamma = \partial D$

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{w(z)\,dz}{z-\zeta}$$

Przykład 1 Obliczyć całkę (rzeczywistą)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi}$$

metodami analizy zespolonej.

Metody analizy rzeczywistej: $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = t$.

- podstawienie trygonometryczne.

Skuteczne ale bolesne...

Przypomnienie $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$

gdzie $z = e^{i\varphi}$.

Wyliczenie $d\varphi$: $dz = e^{i\varphi} i\, d\varphi = iz\, d\varphi$.

a stąd $d\varphi = \frac{dz}{iz}$.

Całkowanie od 0 do 2π: zastępujemy całkowaniem po krzywej $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$

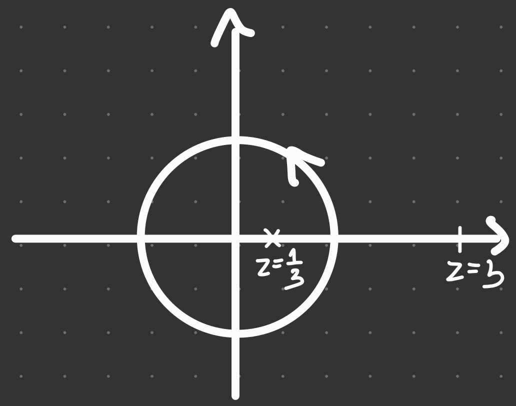
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(5-3\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} =$$

← całka po okręgu $r=1$

$$\oint_{|z|=1} \frac{2i}{3z^2-10z-3} = \oint_{|z|} \frac{2i}{3(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$\Delta = 100-36 = 64$ $z_1 = 3$, $z_2 = \frac{1}{3}$ $a_2 = 3$

Końcową całkę obliczamy ze wzoru Ca-uchyego $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{w(z)}{z-\zeta}\,dz = w(\zeta)$



zatem $\zeta = \frac{1}{3}$ $\quad w(z) = \frac{2i}{3(z-3)}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{w(z)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)} = w\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2i}{3\left(\frac{1}{3}-3\right)} = \frac{2i}{-8} = \frac{-i}{4}$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{2i}{3(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5-3\cos\varphi} = \frac{-i}{4}\cdot 2\pi i = \frac{\pi}{2}.$$

Koniec przykładu.

Szeregi Laurenta:

Przypomnienie; szereg Taylora:

$w: K(0,a) \to \mathbb{C}$ holomorficzne to w

rozwija się w szereg Taylora.

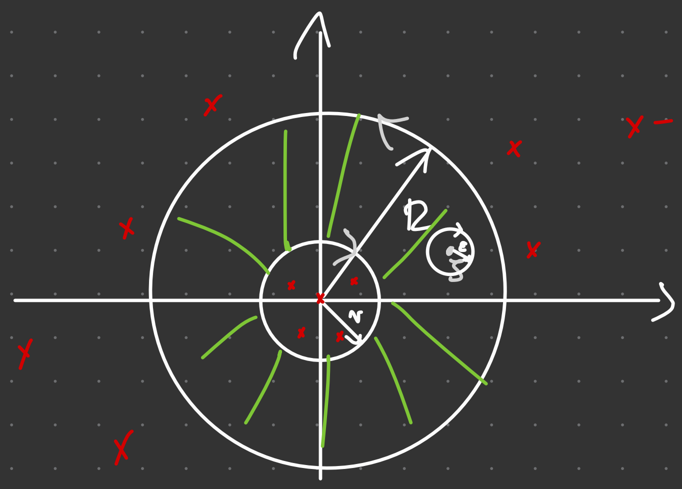
$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \qquad a_n = \frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=a} \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

Co jeśli w ma osobliwości wokół lub

w punkcie $z=0$?

Przypuśćmy, że funkcja w jest holorozwijane na pierścieniu

$$\mathcal{R}(0; r, R) = \{ z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R \}.$$



x - osobliwości:

Ważne: wewnątrz pierścienia nie ma osobliwości

Wartość w punkcie $\zeta \in \mathcal{R}(0; r, R)$

Konstatując ze wzoru Greena tak jak w dowodzie wzoru Cauchy'ego pokazujemy, że

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R(0,r,R)} \frac{w(z)\,dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{w(z)\,dz}{z-\zeta}$$ I_1

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{w(z)\,dz}{z-\zeta}$$ I_2.

Całka I_1: $\frac{1}{z-\zeta}$ $\left\{ \underset{\overset{||}{R}}{|z|} > |\zeta| \right\}$ =

$$\frac{1}{z\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$ ← wstawiamy do całki I_1

i otrzymujemy: $I_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}$

(patrz wzór Taylora)

Całka I_2: $\dfrac{1}{\zeta - z}$ $\{|\zeta| > |z| = r\}$ $=$

$$\frac{1}{\zeta\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{n+1}} \oint_{|z|=r} w(z)\, z^n \, dz.$$

$$I_1 + I_2 = w(\zeta) = \ldots + \frac{a_{-n}}{\zeta^n} + \frac{a_{-n+1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{\zeta} +$$

$$+ a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{w(z)\, dz}{z^{n+1}} \qquad n \geq 0.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{w(z)}{z^{n+1}}\, dz. \qquad n < 0.$$

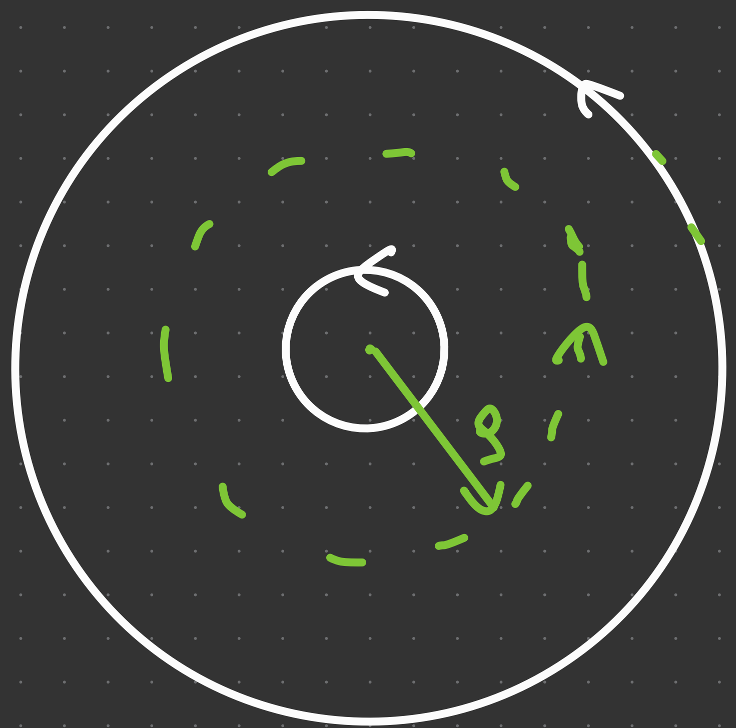
Przykładowo $$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{w(z)}{z^{-2+1}}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{w(z)}{z^{-1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} w(z)\cdot z\, dz.$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} w(z)\, dz \qquad \text{itd.}$$

Ogólny wzór: jeśli $\quad r \leq \rho \leq R.$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$ – otrzymujemy deformując kontury całk.



Co udowodniliśmy?

Jeśli funkcja w jest holomorficzna na pierścieniu $\mathcal{R}(z_0, r, R) =$

$$= \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} \quad r < |z - z_0| < R \}}_{\text{pierścień scentrowany w } z_0.}$$

to $w(z)$ ma rozwinięcie w szereg Laurenta:

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad \text{gdzie}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0| = \rho} \frac{w(z) \, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad r < \rho < R.$$

Przykładowo $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\varrho} w(z)\,dz$.

Izolowany punkt osobliwy funkcji holomorficznej.

z_0 - jest izolowanym ptem osobliwym funkcji w jeśli

w jest holomorficzne na $\{z: 0<|z-z_0|<R\}$

w jest holomorficzne na "nakłutym"

dyskn.

Przykład 1) $w(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $z_0 = 0$

2) $w(z) = \frac{1}{3z^2 - 10z - 3}$ – dwie izolowane osobliwości $z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = 3$.

3) $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ $z_0 = 0$ jest osobliwością ale nie jest izolowaną.

bo osobliwe są $z_n = \frac{1}{2\pi \cdot n}$.

Jaki związek osobliwości ze wzorem Laurenta: Możemy rozwinąć w wokół punktu osobliwego $w(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Przypominamy, że $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} w(z)\,dz$.

Definicja: a_{-1} nazywamy residuum funkcji $w(z)$ w punkcie z_0 i oznaczamy symbolem $\operatorname*{res}_{z_0} w(z)$.

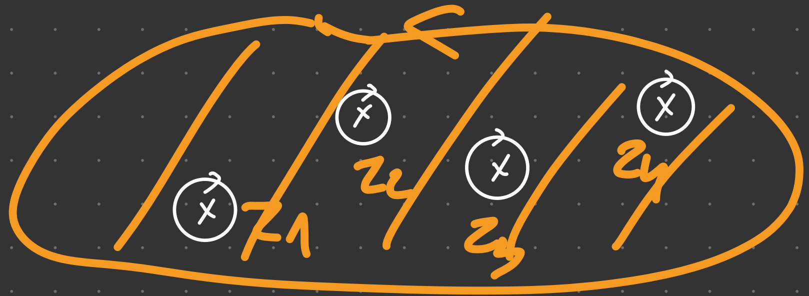
Przykład $w(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $z_0 = 0$ jest izolowaną osobliwością $\operatorname{res} e^{\frac{1}{z}} = 1$.

gdyż $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \overset{=a_{-1}}{\frac{1}{z}} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \dots$

Twierdzenie o residuach:

Niech w będzie funkcją holomor-

Niech w ma D poza skończoną kolekcją osobliwości izolowanych



$w(z)$ $\quad z \neq \times$ – p-ty osobliwe

Wówczas $\displaystyle\oint_{\partial D} w(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_i \in D} w(z)$

Dowód: Wycinamy z D osobliwości

$K(z_i, \varepsilon) = \{ z : |z - z_i| \leq \varepsilon \}$

$D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K(z_i, \varepsilon)$. – wewnętrze w nie ma osobliwości

z tw Greena

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} w(z)\,dz = \int_{\partial D} w(z)\,dz - \overbrace{\oint_{\partial K(z_1,\varepsilon)} w(z)\,dz}^{2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} w(z)} - \dots$$

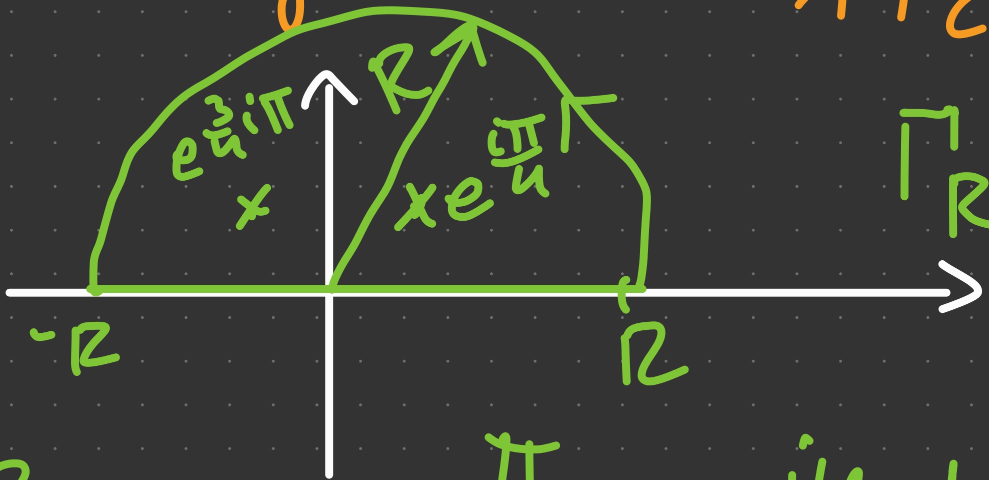
$$\dots - \underbrace{\oint_{\partial K(z_n,\varepsilon)} w(z)\,dz}_{2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_n} w(z)} .$$

$$\int_{\partial D} w(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z_i} w(z) .$$

$\blacksquare$

Przykład: Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

korzystając z tw. o residuach. Ustalamy kontur całkowania funkcji $w(z) = \frac{1}{1+z^4}$.



$$\Gamma_R = [-R, R] \cup \{Re^{i\varphi} : \varphi \in [0, \pi]\}$$

$$\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\varphi} i\, d\varphi}{1+R^4 e^{4i\varphi}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{2} 2\pi i \operatorname{res}_{z_i}(w(z))}_{\text{Nie zależy od } R.}$$

$$\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^4} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{Re^{i\varphi} i\, d\varphi}{1+R^4 e^{4i\varphi}} \leq \frac{2}{R^3} \cdot \pi \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Jak obliczać residua:

residuum w punkcie $e^{i\frac{\pi}{4}}$: $\frac{1}{1+z^4}$.

$e^{i\frac{\pi}{4}}$ jest zerem $1+z^4$.

Czyli $1+z^4 = \left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)u(z)$

↖ wiel. st 3.

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{\left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} \cdot \underbrace{\frac{1}{u(z)}}_{\neq 0} \qquad z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

W szczególności $\frac{1}{u(z)}$ rozwija się np w szereg Taylora wokół $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{1}{(1+z^4)} = \frac{1}{(z-e^{i\frac{\pi}{4}})}\left(b_0 + b_1\cdot(z-e^{i\frac{\pi}{4}}) + b_2\cdot(z-e^{i\frac{\pi}{4}})^2 + \ldots\right) = \underbrace{\frac{b_0}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}} + b_1 + b_2(z-e^{i\frac{\pi}{4}}) + \ldots$$

Residuum wynosi b_0..

$$b_0 = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+z^4} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\frac{1+z^4}{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}} =$$

$$\frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 3}} = \operatorname{res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4}$$

Podobnie obliczamy $\operatorname{res}_{z=e^{\frac{3}{4}i\pi}} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4\cdot e^{\frac{9}{4}i\pi}}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{e^{\frac{3}{4}i\pi}} + \frac{1}{e^{\frac{9}{4}i\pi}}\right) =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{3}{4}i\pi}} + \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{9}{4}i\pi}}\right) \overset{?}{=} \frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$

$$= \pi \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$