W 14.12.2011

Macierze operatorów. X, Y – p-nie nad $\mathbb{K}$

$\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{F}_1$

bazy X, Y $\quad T: X \to Y$ operator liniowy

$[T]^{\mathcal{F}_1}_{\mathcal{E}_1}$ – macierz operatora T w bazach $\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1$

W jaki sposób macierz operatora zależy od wyboru baz?

Niech $\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2$ – bazy X i Y odpowiednio

Niech $\mathbb{1}_X : X \to X$, $\mathbb{1}_X(x) = x$ – operator identycznościowy

Podobnie mamy $\mathbb{1}_Y : Y \to Y$

$$[T]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{E}_2} = [\mathbb{1}_Y \cdot T \mathbb{1}_X]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{E}_2} = [\mathbb{1}_Y]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{F}_1} \cdot [T]^{\mathcal{F}_1}_{\mathcal{E}_1} \cdot [\mathbb{1}_X]^{\mathcal{E}_1}_{\mathcal{E}_2}$$

stwierdzenie o składaniu op. vs mnożenie macierzy.

Macierz $[\mathbb{1}_X]^{\mathcal{E}_1}_{\mathcal{E}_2}$ nazywamy macierzą przejścia z $\mathcal{E}_2$ do $\mathcal{E}_1$

Przykład (macierz przejścia) $X = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{E}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \mathcal{E}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{E}^1}_{\mathcal{E}^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Jeśli $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ to $[\mathbb{1}_X]^{\mathcal{E}_1}_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Definicja: Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ nazywamy macierzą identycznościową $n \times n$ i oznaczamy $\mathbb{1}_n$.

Definicja: Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Mówimy, że A jest macierzą odwracalną jeśli $\exists\ B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$; $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}$

Uwaga: Jeśli A – odwracalna to macierz B j.w. jest jednoznacznie wyznaczona i będzie oznaczana symbolem A^{-1}

Stwierdzenie: Niech $X, Y, \mathcal{E}, \mathcal{F}$, $T \in L(X,Y)$ j.w. Wówczas:

(1) Jeśli T jest izomorfizmem to $[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ jest odwracalna oraz $\left([T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} = [T^{-1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$

(2) Jeśli macierz $[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ jest odwracalna to T jest izomorfizmem.

Dowód:

(1) $T^{-1}: Y \to X \qquad T^{-1}\circ T = 1\!\!1_X \;,\; T\circ T^{-1} = 1\!\!1_Y$

Wówczas $1_{\dim X} = [1_X]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [T^{-1}\circ T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [T^{-1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} \cdot [T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$

Podobnie $1_{\dim Y} = [T\circ T^{-1}]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = [T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \cdot [T^{-1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$.

W takim razie $\left([T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1} = [T^{-1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$

(2) Przypuśćmy, że $[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ jest macierzą odwracalną.
Wtedy $T^{-1}: Y \to X$ jest operatorem którego macierz w bazach $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ jest dana formułą:

$$[T^{-1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \left([T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}\right)^{-1}$$
(Korzystamy z utożsamienia $L(X,Y) \cong M_{\dim Y \times \dim X}(\mathbb{K})$)

Rozważmy p-ń wektorową $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ - ciało.
W p-ni $\mathbb{K}^n$ mamy bazę standardową $\mathcal{E}_n = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)$.
Podobnie w $\mathbb{K}^m$ mamy bazę $\mathcal{E}_m$.
To pozwala utożsamić $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ z $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\begin{array}{ccc} L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) & & \\ \ni & & \\ T & \longmapsto & [T]^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{E}_n} \end{array}$$

Niech $[T]^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{E}_n} = [\alpha_{ij}]$ i niech $x = \begin{bmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Wtedy $$\underset{\substack{\parallel\!\mid \\ TX}}{T(x)} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & & \alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\vdots\\\\\beta_n\end{bmatrix}$$

Notacja:

X, Y - p-nie wektorowe oraz $T \in L(X,Y)$ i $x \in X$ to od tej pory będziemy pisali Tx zamiast $T(x)$.

Przestrzeń sprzężona (dualna)

Definicja: Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Wtedy przestrzeń wektorową $L(X,\mathbb{K})$ nazywamy przestrzenią sprzężoną i oznaczamy symbolem X' (w skrypcie $X' \overset{\text{ozn}}{=} X^*$)

Uwaga: $\dim X < \infty$. Wówczas $\dim X' = \dim X \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim \mathbb{K}}} = \dim X$

Przykłady:

(i) $\phi: \mathbb{R}_n[\cdot] \ni w \longmapsto \phi(w) = w(0) \in \mathbb{R}$

(ii) $\phi_k: \mathbb{K}^n \ni \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \longmapsto \beta_k \in \mathbb{K}$

Notacja:
(1) Elementy X' będziemy oznaczali greckimi literami ϕ, ψ, ω, η i nazywali funkcjonałami liniowymi
(2) Działanie funkcjonału $\phi \in X'$ na wektorze $x \in X$ oznaczamy symbolem $\langle \phi, x \rangle \in \mathbb{K}$

Baza dualna:

Niech X – p-ń w. nad $\mathbb{K}$, $\dim X < \infty$

$\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$ – baza X

Niech $k \in \mathbb{N}$. Rozważmy funkcjonały liniowe $\phi_k \in X'$ t, że ~~$\langle \phi_k, x_i \rangle$~~

$$\langle \phi_k, x_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = i \\ 0 & \text{jeśli } k \neq i \end{cases}$$

Stwierdzenie.

Układ funkcjonałów $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ jest bazą X.

Dowód:

Wystarczy sprawdzić liniową niezależność $\{\phi_1, \dots \phi_n\}$ bo $n = \dim X'$

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Przypuśćmy, że $\alpha_1 \cdot \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0$

Policzmy $\langle \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n, x_1 \rangle = \alpha_1 \longrightarrow \alpha_1 = 0$

$\langle \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n, x_2 \rangle = \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2 = 0$

$\vdots$

$\langle \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n, x_n \rangle = \alpha_n \qquad \alpha_n = 0$

$$\langle \phi_k, x_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = i \\ 0 & \text{dla } k \neq i \end{cases}$$

$\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ jest bazą X'

Definicja: X, $\mathcal{E}=\{x_1,\dots,x_n\}$ j.w.

Bazę $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ p-ni X' nazywamy bazą sprzężoną i oznaczamy symbolem $\mathcal{E}'$.

Obserwacja: Niech $T\in L(X,Y)$, $\mathcal{E},\mathcal{F}$ – bazy X i Y

$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}=[\alpha_{ij}]$. Wówczas $\alpha_{ij}=\langle\psi_i, Tx_j\rangle$

$\mathcal{E}=\{x_1,\dots,x_n\}$

$\mathcal{F}'=\{\psi_1,\dots,\psi_m\}$

$\mathcal{F}=\{y_1,\dots,y_m\}$

Przykład:

$\mathbb{R}_n[\cdot]$, $\mathcal{E}=\{1,t,t^2,\dots,t^n\}$

$\mathcal{E}'=\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ – baza sprzężona

$$\langle\phi_k, t^i\rangle=\begin{cases}1 & \text{dla } i=k\\ 0 & \text{dla } i\neq k\end{cases}$$

Jeśli położymy $\phi_k(w)\overset{def}{=}\frac{1}{k!}w^{(k)}(0)$ — k-ta pochodna

$\langle\phi_k, w\rangle\overset{def}{=}\frac{1}{k!}w^{(k)}(0)$ gdzie $w\in\mathbb{R}_n[\cdot]$

np. dla $k=1$

$$\langle\phi_1, t^i\rangle=\frac{1}{1!}(t^i)'(0)=\frac{i}{1!}t^{i-1}(0)=\begin{cases}1 & i=1\\ 0 & i\neq 1\end{cases}$$

Druga sprzężona

Zał.: $\dim X<\infty$

X' – przestrzeń sprzężona

$(X')'\overset{ozn}{=}X''$

$((X')')'\overset{ozn}{=}X'''$

itd

Obserwacja: Niech $x\in X$ – ustalony

przypisane liczby funkcjonałom

Rozważmy odwzorowanie $X'\ni\phi\longmapsto\langle\phi,x\rangle\in\mathbb{K}$

Oznaczmy je symbolem $\kappa(x)$: $\kappa(x)(\phi)=\langle\phi,x\rangle$

Czy $\kappa(x) \in X''$?

tak : $\kappa(x)(\phi_1+\phi_2) = \langle \phi_1+\phi_2, x\rangle = \langle \phi_1, x\rangle + \langle \phi_2, x\rangle = \kappa(x)(\phi_1) + \kappa(x)(\phi_2)$

Podobnie $\kappa(x)(\alpha\cdot\phi) = \alpha\,\kappa(x)(\phi)$

To oznacza, że $\kappa(x) \in X''$ a więc dostajemy odwzorowanie

$\kappa : X \ni x \longrightarrow \kappa(x) \in X''$

Twierdzenie

Niech X, κ – j.w.

Wówczas κ jest liniową bijekcją. Innymi słowy κ jest izomorfizmem X i X''.

W — 21.12.2011

X – p-ń wek. nad $\mathbb{K}$, $\dim X < \infty$

$X' = L(X, \mathbb{K})$ $\quad X'' \overset{def}{=} (X')'$

Odwzorowanie $\kappa : X \to X''$

$\forall \varphi \in X' \quad \langle \kappa(x), \varphi\rangle \overset{def}{=} \langle \varphi, x\rangle \in \mathbb{K}$

Dowód twierdzenia (κ jest izomorfizmem)

(1) Liniowość κ : $\kappa(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \overset{?}{=} \alpha_1 \kappa(x_1) + \alpha_2 \kappa(x_2)$ $(*)$

$\forall \varphi \in X'$ mamy:

$$\langle \kappa(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \varphi\rangle = \langle \varphi, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle$$
$$= \alpha_1 \langle \varphi, x_1\rangle + \alpha_2 \langle \varphi, x_2\rangle =$$
$$= \alpha_1 \langle \kappa(x_1), \varphi\rangle + \alpha_2 \langle \kappa(x_2), \varphi\rangle =$$
$$= \langle \alpha_1 \kappa(x_1) + \alpha_2 \kappa(x_2), \varphi\rangle$$

Więc dostajemy $(*)$

(2) Izomorficzność

Niech $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$ - baza X i niech $\mathcal{E}' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ baza X' sprzężona do X. Udowodnimy, że $\{K(x_1), \dots, K(x_n)\} = \mathcal{E}''$

Mianowicie: $\langle K(x_i), \varphi_j \rangle = \langle \varphi_j, x_i \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Korzystając z widzimy, że K jest izomorfizmem

Lemat: X, Y - p-nie nad $\mathbb{K}$, $T \in L(X, Y)$ $\dim X, \dim Y < \infty$

Niech $\mathcal{E} = (x_1, \dots, x_n)$ będzie bazą X. Wówczas T jest izomorfizmem $\iff$ $\iff$ $(Tx_1, \dots, Tx_n)$ jest bazą Y.

$\Rightarrow$ dowód: T-izomorfizm, to $\underset{\text{iniekt.}}{\ker T = \{0\}}$ oraz $\underset{\text{surjekt.}}{\operatorname{Ran} T = Y}$

W takim razie układ $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ generuje Y bo ~~...~~

$\{Tx : x \in X\} = \{T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n), \alpha_i \in \mathbb{K}\} = \{\alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_n T(x_n) : \dots\} =$
$= \operatorname{span}\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$

Czy ten układ jest liniowo niezależny?

TAK: jeśli $\alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_n T(x_n) = 0 \iff T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0 \iff$
$\iff \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \ker T$. Czyli $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ oraz
$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Leftarrow$ dowód: Czy T jest izomorfizmem? założ. że ukł. jest bazą

(1) Czy $\ker T = \{0\}$? Jeśli $T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0 \iff \alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_n T(x_n) = 0$
$\iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

(2) $\operatorname{Ran} T = Y$? $\operatorname{Ran} T = \{Tx : x \in X\} = \{T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) : \alpha_i \in \mathbb{K}\} =$
$= \{\alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_n T(x_n) : \alpha_i \in \mathbb{K}\} = Y$

Odwzorowanie sprzężone

Definicja: X, Y - p-nie wek. nad $\mathbb{K}$, $\dim X, \dim Y < \infty$

Niech $T \in L(X,Y)$. Operatorem $T' : Y' \longrightarrow X'$ t. że $\forall \varphi \in Y'$, $T'\varphi = \varphi \circ T : X \to \mathbb{K}$

$(\varphi \circ T \in X')$ nazywany sprzężeniem operatora T.

Uwaga: (1) $T' \in L(X,Y)$ jest scharakteryzowany następującą równością

$\langle T'\varphi, x \rangle = \langle \varphi, Tx \rangle$ gdzie $\varphi \in Y'$, $x \in X$:

$\langle T'\varphi, x \rangle \underset{\text{notacja}}{=} T'\varphi(x) = (\varphi \circ T)(x) = \varphi(Tx) \underset{\text{notacja}}{=} \langle \varphi, Tx \rangle$

(2) Jeśli dodatkowo $S \in L(Y, Z)$ gdzie Z - p-ń nad $\mathbb{K}$ to $(S \circ T)' = T' \circ S'$

$$(S \circ T)'(\varphi) = \varphi \circ (S \circ T) = (\varphi \circ S) \circ T = (S'\varphi) \circ T = T'(S'\varphi) = (T' \circ S')(\varphi)$$

Macierz operatora sprzężonego

Definicja: Niech $A = [\alpha_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Mówimy, że $B = [\beta_{ji}] \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ jest macierzą transponowaną do A. Macierz transponowaną oznaczamy symbolem $A^T = B$

np.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{K})$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{K})$$

Stwierdzenie: Niech $S \in L(X,Y)$, $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{F} = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathcal{E}' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\mathcal{F}' = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ - bazy X, Y, X', Y' odpowiednio. Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = [S]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$. Wówczas $[S']_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = A^T$.

dowód: Niech $A = [\alpha_{ij}]$ $\quad \alpha_{ij} = \langle \psi_i, Sx_j \rangle$

Jeśli $[S']_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = [\beta_{ji}]$ to podobnie $\beta_{ji} = \langle K(x_j), S'\psi_i \rangle =$

$= \langle S'\psi_i, x_j \rangle = \langle \psi_i, Sx_j \rangle = \alpha_{ij}$

Rząd operatora i rząd macierzy

Definicja. Niech $T \in L(X,Y)$. Rzędem T nazywamy liczbę $\dim \operatorname{Ran} T$ (wymiar obrazu T) i oznaczamy symbolem $\operatorname{rk} T$

(2) Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Rzędem A nazywamy rząd operatora z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ zadanego macierzą A, ozn. $\operatorname{rk}(A)$

Uwaga 1. $\operatorname{rk} A$ jest maksymalną liczbą liniowo niezależnych kolumn A.

Jeśli $A = [v_1, \ldots, v_n]$ $v_i \in \mathbb{K}^m$ to $\dim \operatorname{Ran} A = \dim \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ $=$ (wybierając maks. ukł. l niezależnych wektorów $v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}$) $= l$

Jeśli $U \in L(X_1, X)$ oraz $V \in L(Y, Y_1)$ są izomorfizmami wtedy

(*) $\operatorname{rk}(V \circ T \circ U) = \operatorname{rk}(T)$

Niech teraz $\mathcal{E} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ - bazy X i Y

Niech $U : \mathbb{K}^n \to X$ i $U\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$

oraz $V : \mathbb{K}^m \to Y$ i $V\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m$

Wówczas $V^{-1} \circ T \circ U \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Ćwiczenie $V^{-1} \circ T \circ U = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$

z (*) $\Rightarrow$ $\underset{\operatorname{rk}(T)}{\underset{\parallel}{\operatorname{rk}(V^{-1} \circ T \circ U)}} = \operatorname{rk}\left([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)$

Twierdzenie : $\dim X, \dim Y < \infty$

Niech $T \in L(X,Y)$. Wówczas $rk(T) = rk(T')$

dowód:

$$T' \in L(Y', X')$$

$$rk\, T' = \dim Ran\, T' = \dim Y' - \dim Ker\, T' = \dim Y - \dim Ker\, T'$$

Analiza $\ker T'$:

$\ker T' = \{\varphi \in Y' : T'\varphi' = 0\} = \{\varphi \in Y' : \forall x \in X\ ; \ \langle \varphi, Tx \rangle = 0\}$

Niech $\{y_1, \dots, y_l\}$ baza $Ran\, T \subset Y$. Dopełniamy do bazy Y $\mathcal{E} = \{y_1, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_m\}$,

$\mathcal{E}' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – baza dualna

Jeśli: $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m \Rightarrow \langle \varphi, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \langle \varphi, y_i \rangle = 0$ dla $i \in \{1, \dots, l\}$

Niech $\varphi \in Y'$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m, y_i \rangle = \alpha_i \qquad \underset{(\alpha_i = 0)}{i \in \{1, \dots, l\}}$$

A więc $\varphi \in \ker T' \Leftrightarrow \varphi = \alpha_{l+1} \varphi_{l+1} + \dots + \alpha_m \varphi_m$. Czyli $\dim \ker T' = m - l = \dim Y - \dim Ran\, T =$

$= \dim Y - rk\, T$

- $rk\, T' = \dim Y - \dim \ker T' = \dim Y - (\dim Y - rk\, T) = rk\, T$

Wniosek:

Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Wówczas $rk\, A = rk\, A^T$. Ponieważ transpozycja zamienia wiersze z kolumnami to:

- maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy A jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wierszy macierzy A

Uwaga: Ponieważ sprzęganie operatorów na poziomie ich macierzy odpowiada transpozycji oraz $(S\circ T)' = T'\circ S'$ to $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

W 4.01.2012

Wyznaczniki:

$M_n^m(K)$ - p-ń macierzy m-wierszy n-kolumn

$$M_n^m(K) = M_1^m(K)\times\ldots\times M_1^m(K)$$

Def. Odwzorowanie $D: M_1^m(K)\times\ldots\times M_1^n(K)\to K$ nazywamy wyznacznikiem jeśli:

1) $D(\bar a_1,\ldots,\alpha\bar a_i+\beta\bar b_i,\bar a_{i+1},\ldots\bar a_n) = \alpha D(\bar a_1,\ldots,\bar a_i,\bar a_{i+1},\ldots\bar a_n) + \beta D(\bar a_1,\ldots,\bar b_i,\ldots\bar a_n)$ dla $i=1,\ldots,n$

2.) $D(\bar a_1,\ldots\bar a_i,\ldots,\bar a_j,\ldots,\bar a_n) = -D(\bar a_1,\ldots,\bar a_j,\ldots\bar a_i,\ldots,a_n)$

3.) $\underbrace{D(I)}_{\text{macierz jednostkowa}} = 1$

Uwaga

2) można zastąpić

2') $\bar a_i = \bar a_j$ to $D(\bar a_1,\ldots,\bar a_n) = 0$

$$D(\bar a_1,\ldots,\underbrace{\bar a_i+\bar a_j}_{i},\ldots,\underbrace{\bar a_i+\bar a_j}_{j},\ldots,a_n) = 0 = D(\bar a_1,\ldots,\bar a_i,\ldots\bar a_j,\ldots\bar a_n) +$$
$$+ D(\bar a_1,\ldots,\bar a_j,\ldots\bar a_i,\ldots\bar a_n)$$

Warunki 1) i 2) mają sens gdy $M_1^m(K)$ zastąpimy dowolną p.w

Stw.

1.) $D(0) = 0$

2.) $\bar{a}_i = \bar{a}_j$ dla $i \neq j$ to $D(A) = 0$ $\quad A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$

3.) $D([\bar{a}_1, \dots, \bar{b}_i, \dots, \bar{a}_n]) = D(A)$ $\quad \bar{b}_j = \bar{a}_i + \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{} + \lambda_n \bar{a}_n$

Wyznaczniki:

$D(AB) = ?$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{bmatrix} \cancel{\;A\;} \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \end{array} \qquad \bar{a}^i \bar{b}_j = \sum_k a_k^i b_j^k$$

$$\bar{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = j$$

$\bar{a}^i$ - wiersz macierzy A

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \bar{b}_1 & \bar{a}^1 \bar{b}_2 & \dots & \bar{a}^1 \bar{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}^n \bar{b}_1 & \bar{a}^n \bar{b}_2 & \dots & \bar{a}^n \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_i = \sum_j b_i^j \bar{e}_j$$

$$D(AB) = \sum_j b_i^j D\left(\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \bar{e}_j & \dots \\ \vdots & \\ \bar{a}^n \bar{e}_j & \dots \end{bmatrix}\right) = \sum_{j_1 \dots j_n} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_n^{j_n} D\left(\begin{bmatrix} \bar{a}^1 e_{j_1} & \bar{a}^1 e_{j_2} & \dots & \bar{a}^1 e_{j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}^n e_{j_1} & \bar{a}^n \bar{e}_{j_2} & & \bar{a}^n e_{j_n} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S(n)} b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} D\left(\begin{bmatrix} \bar{a}^1 e_{\sigma(1)} & \dots \\ \vdots & \\ \bar{a}^n e_{\sigma(1)} & \dots \end{bmatrix}\right) = \sum_{\sigma \in S(n)} b_1^{\sigma(1)} \dots b_n^{\sigma(n)} D([\bar{a}_{\sigma(1)}, \dots, \bar{a}_{\sigma(n)}])$$

$$= \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn} \sigma \, b_1^{\sigma(1)} \dots b_n^{\sigma(n)} D(A)$$

$$D(AB) = \left(\sum_{6 \in S(n)} \operatorname{sgn} 6 \, b_1^{6(1)} \dots b_n^{6(n)} \right)$$

$$D(A) = D(IA) = \left(\sum_{6 \in S(n)} \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6(1)} \dots a_n^{6(n)} \right) D(I) = \sum_{6 \in S(n)} \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6(1)} \dots a_n^{6(n)}$$

Jeżeli D jest wyznacznikiem to $\underline{D(A) = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6(1)} \dots a_n^{6(n)} := \det A}$

Czy wzór definiuje wyznacznik?

(Sprawdzamy 3 warunki) (1.) ✓ oczywiste $D(I) = 1$

(2) (antysymetrii war.) (3) ✓

$$\det[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_n] = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \left(a_1^{6(1)} \dots a_n^{6(n)} \right) = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6(1)} \dots a_j^{6(j)} \dots a_i^{6(i)} \dots$$

$$6'(1) = 6(1) \dots 6'(i) = 6(j) \dots 6'(j) = 6(i)$$

$$6' = 6 \circ (ij) \Rightarrow \text{znak}$$

$$= \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6'(1)} \dots a_j^{6'(i)} \dots a_i^{6'(j)} \dots = -\sum_{6'} \operatorname{sgn} 6' \, a_1^{6'(1)} \dots = -\det[\bar{a}_1, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots \bar{a}_n]$$

i

<u>Wnioski</u>

1.) $D(AB) = \det B \, D(A) \equiv \det(AB) = \det A \cdot \det B$

2.) Tw. Cauchy'ego

$\det A = \det A^T$

D $\det A = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a_1^{6(1)} \dots a_n^{6(n)} = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a^1_{6^{-1}(1)} \dots a^n_{6^{-1}(n)} =$

$$= \sum_6 \operatorname{sgn} 6^{-1} a^1_{6(1)} \dots a^n_{6(n)} = \sum_6 \operatorname{sgn} 6 \, a^1_{6(1)} \dots a^n_{6(n)} = \det A^T \quad \Big| \quad a^1_{6(1)} = (a^T)^{6(1)}_n$$

Stw. $A \in M_m^n(K)$ $\det A = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy kolumny są liniowo zależne (i wiersze)

D: kol. l.z $\rightarrow$ $\det A = 0$

$A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i]$ $\quad$ $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ l.zależne jeżeli $\exists\ \bar{a}_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \bar{a}_i$

$$\det[a_1 \dots a_i] = \det[a_1 \dots a_j - \sum \lambda_i \bar{a}_i] = 0 \quad \bar{a}_j - \sum_{i \neq j} \lambda_i \bar{a}_i = 0$$

D: $\det A = 0 \longrightarrow$ kol. l.z

$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ - l.n.zal. - tworzą bazę przestrzeni kolumn

$\bar{e}_1 = b_1^1 \bar{a}_1 + b_1^2 \bar{a}_2 + \dots$

$\vdots$

$\bar{e}_2 = \sum_j b_i^j \bar{a}_j$

$\vdots$

$$\underbrace{[\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n]}_{= I} = AB \Rightarrow \underbrace{\det I}_{=1} = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det A \neq 0$$

$\square$

$B = A^{-1}$ Jeżeli $AB = I$ - macierz jednostkowa

Wniosek : ~~A ma macierz~~

A jest odwracalna, tzn. $\exists\ A^{-1}$ wtw gdy $\det A \neq 0$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

Rozwinięcie Laplace'a

wyzn. bez 1 kolumny i 1 wiersza

Def.

$$\begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \end{array}$$

<u>Dopełnieniem algebraicznym</u> elementu a_j^i macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy A z wykreślonym i-tym wierszem i j-tą kolumną, wymnożony przez $(-1)^{i+j}$

Oznaczenie A_i^j – dopełnienie alg. elementu a_j^i

<u>Tw. Rozwinięcie Laplace'a</u>

$$\forall k,l \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_l^k A_k^i = \sum_{i=1}^{n} a_l^i A_i^l$$

dowód:

$$D: A \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i^1 \cdot A_1^i \quad \text{jest wyznacznikiem}$$

1.) $B = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i + \bar{a}_i' \dots \bar{a}_n]$ $\qquad A' = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_i' \dots \bar{a}_n]$

$$D(B) = a_1^1 (A_1^1 + A_1'^1) + \dots + (a_i^1 + a_i'^1) A_1^i + \dots + a_n^1 (A_1^n + A_1'^n) =$$

wyzn.

$$\| \quad a_i^1 A_1^i + a_i'^1 A_1'^i$$

$$= D(A) + D(A')$$

Wyznaczniki:

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

$\det[a_1,\dots,a_n] \in \mathbb{K}$ $\qquad a_i = \begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots \\ \alpha_{ni}\end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$A = [\alpha_{ij}]$ $\qquad \det A \equiv \det[a_1,\dots,a_n]$

wł. det: $\det[a_1,\dots,\lambda a_i + \mu a_i',\dots,a_n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \det[a_1,\dots,a_i,\dots,a_n] + \mu\det[a_1,\dots,a_i',\dots a_n]$

~~det A~~: $\det[a_1\dots a_i \dots a_j \dots a_n] = -\det[a_1\dots a_j\dots a_i\dots a_n]$

$\det[1]=1$

Wzór: $\det A = \sum_\pi \operatorname{sgn}\pi \cdot \alpha_{1\pi(1)}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n\pi(n)}$

$\det[a_1,\dots a_i+\lambda a_j,\dots,a_j\dots,a_n] = \det[a_1,\dots,a_n]$

wł. c.d. $\det(AB)=\det A\det B$ $\qquad A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$\det\left(\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}\right) = \det A\cdot\det B$ $\qquad A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$B\in M_{m\times m}(\mathbb{K})$

$$\det\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}A&0\\0&1_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1_n&0\\0&B\end{bmatrix} = \underbrace{\det\begin{bmatrix}A&0\\0&1_m\end{bmatrix}}_{\det A}\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}1_n&0\\0&B\end{bmatrix}}_{\det B}$$

$\det(A^T)=\det(A)$ $\qquad$ z własn. jednoznaczności wyznacznika

rozwinięcie Laplace'a:

$$\det[a_1,\dots,a_i\dots a_n] = \det[a_1,\dots,\underbrace{\sum \alpha_{ji} e_j}_{\text{baza kanoniczna}} \dots a_n] =$$

$$= \sum_j \alpha_{ji}\det[a_1\dots \overset{i}{e_j}\dots e_n]$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{1n}\\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn}\end{bmatrix} j = \det\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ & \begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & \alpha_{1n}\\ 0 & 1 & 0\\ \alpha_{n1}\dots & 0 & \alpha_{nn}\end{bmatrix} j \end{array} =$$

$$= \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{n1} & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow j \end{array}$$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_{ji}$ ← wzór Laplace'a

Macierz $[A_{ij}]$ - nazywamy macierzą dołączoną macierzy A i ozn. symbolem $A^D = [A_{ij}]$ (i – wiersz, j – kol.)

Wniosek 1: $k \neq i$ $\sum_{j=1}^{n} A_{kj} \alpha_{ji} = 0$, ponieważ lewa str. jest wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{ni} & \alpha_{nj} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$

podsumowując $\sum_{j=1}^{n} A_{kj} \alpha_{ji} = \delta_{ki} \det A$

Wn. 2 Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą odwracalną i wtedy $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$

Wyznacznik endomorfizmu:

Stw. Niech X - pr. wektorowa nad $\mathbb{K}$ $\dim X < \infty$

Niech $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ będą bazami X oraz $T \in L(X)$ wtedy

$$\det [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \det [T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$$

Df. liczbę $\det [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ nazywamy wyznacznikiem endomorfizmu T

D: $\det [T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \det\left([id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} [id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\right) = \det\left([id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \cdot \det\left([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) \cdot \det\left([id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\right) = \underbrace{\det\left([id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}\right)}_{=\det([id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}) = \det 1 = 1} \cdot \det\left([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\right) = \det [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

18.01.2012

Wyznaczniki → c.d. w styczniu

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$

$\det[a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{K}$ $\qquad a_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Rozważmy układ m równań liniowych ma n zmiennych o współ. z ciała $\mathbb{K}$

$$(*) \begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \dots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m \end{cases}$$

Wprowadzając $A = [\alpha_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Przepisujemy $(*)$ w postaci macierzowej:

: $Ax = b$ ← niejednorodność ukł. równań

Stw. Niech $Ax = b$ będzie j.w. Wówczas:

(1) rozwiązanie ukł. równań istnieje $\Leftrightarrow b \in \operatorname{Ran} A$

(2) Jeśli x_s jest rozwiązaniem: $Ax_s = b$ to zbiór wszystkich rozwiązań jest postaci $x_s + \ker A$

(3) Niech $U \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ będzie odwracalna wówczas zbiór rozwiązań równania $UAx = Ub$

Dowód:

(2) x jest rozwiązaniem $Ax = b = Ax_s \Leftrightarrow A(x - x_s) = 0$

$x - x_s \in \ker A \Leftrightarrow x \in x_s + \ker A$

(3) Mnożąc $Ax = b$ przez U dostajemy $UAx = Ub$

Na odwrót: Jeśli $UAx = Ub$ to mnożąc przez U^{-1} dostajemy $Ax = b$

Wniosek:

Biorąc $U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots \lambda \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i \end{array}$, $\lambda \neq 0$

dostaję: mnożenie jednego z równań przez wsp. $\lambda \neq 0$ nie zmienia rozwiązań.

(2) $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots 1 \end{bmatrix}$ – odpowiada zamianie miejscami równania pierwszego i drugiego.

(3) Biorąc $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ – odpowiada dodaniu 2-go równania do pierwszego.

Wzór Cramera

Przypuśćmy, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ jest macierzą odwracalną.
Rozważmy r-nie $Ax = b$. Wówczas x jest wyznaczony jednoznacznie
$x = A^{-1} b$

Niech $A = [a_1, \dots, a_n]$ $a_i \in \mathbb{K}^n$ oraz $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Wówczas $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + 1 \cdot (x_i a_i - b) + x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n = 0$

Wektory $a_1, a_2, \dots, x_i a_i - b, a_{i+1}, \dots, a_n$ są l. zależne

W takim razie $\det [a_1, a_2, \dots, x_i a_i - b, \dots, a_n] = 0$

$\Rightarrow x_i \det [a_1, \dots, a_i, \dots, a_n] = \det [a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n]$

$\Rightarrow x_i = \dfrac{\det [a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1} \dots a_n]}{\det A}$

Ślad macierzy i ślad endomorfizmu

Definicja: Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $A = [\alpha_{ij}]$. Śladem nazywamy skalar dany wzorem $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ i oznaczamy symbolem $\operatorname{tr} A$.

Stwierdzenie (Własności tr)

(1) $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$ czyli $\operatorname{tr} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})'$

(2) $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$ w szczególności $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$

dowód (2)

$A = [\alpha_{ij}]$ $B = [\beta_{ij}]$ to $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \beta_{ki} =$

$= \sum_k \sum_i \beta_{ki} \alpha_{ik} = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

(3) $\operatorname{tr}(1_n) = n$

Uwaga: 1, 2, 3 wyznaczają jednoznacznie trace

Wniosek: $T \in L(V)$, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ – bazy. Wówczas $\operatorname{tr}[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \operatorname{tr}[T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$

$$\operatorname{tr}\left([id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} [T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) = \left\{ \begin{array}{l} U = [id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \\ U^{-1} = [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \end{array} \right\} = \operatorname{tr}\left([T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}\right)$$

$\shortparallel$

$\operatorname{tr}[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

W 14.02.2012

X, Y - p-nie wektorowe nad $\mathbb{K}$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ - bazy X, Y

X' - p-ń dualna

$\mathcal{E}'$ - baza dualna do $\mathcal{E}$

$L(X,Y)$ - zbiór odwzorowań liniowych

$X' = L(X, \mathbb{K})$

np. Jeśli $X = \mathbb{R}^n$. Każdy funkcjonał na $\mathbb{R}^n$ jest postaci

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathbb{R}$$

$$[a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie $[a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$

Formy dwuliniowe

np.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) \longmapsto \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} y_i a_{ij} x_j \in \mathbb{R}$$

Def.

Niech X, Y będą p-niami wektorowymi nad $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$)

Odwzorowanie $\Phi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ nazywamy formą dwuliniową jeśli:

(1) $\forall\, x \in X$ odwzorowanie $Y \ni y \longmapsto \Phi(x, y) \in \mathbb{K}$

jest funkcjonałem liniowym

(2) $\forall\, y \in Y$ odwz. $X \ni x \longmapsto \Phi(x,y) \in \mathbb{K}$ jest funkcjonałem liniowym

Zbiór form dwuliniowych na $X \times Y$ oznaczamy symbolem ~~L(X,Y)~~ $L(X,Y;\mathbb{K})$

$L(X,Y,\mathbb{K})$ jest przestrzenią wektorową.

Rozważmy odwzorowanie $Y \ni y \longmapsto \Phi(\cdot, y) \in X'$

Odwzorowanie to oznaczamy symbolem $F_\Phi \in L(Y, X')$

Zauważmy, że $L(X,Y;\mathbb{K}) \ni \Phi \overset{T}{\longmapsto} F_\Phi \in L(Y,X')$

Związek między Φ oraz F_Φ : $\langle x, F_\Phi(y)\rangle = \Phi(x,y)$

Stwierdzenie:

Niech T: $L(X,Y,\mathbb{K}) \longrightarrow L(Y,X')$ będzie j.w.

Wówczas T jest izomorfizmem

Dowód:

odwzorowanie odwrotne : $T^{-1}: L(Y,X') \longrightarrow L(X,Y;\mathbb{K})$

$$\left(T^{-1}(F)\right)(x,y) = \langle x, Fy\rangle$$

Def.:

Niech $\Phi \in L(X,Y,\mathbb{K})$, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ będzie bazą X, Y.

Macierzą Φ w bazach $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ nazywamy macierz $[F_\Phi]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}'}$

Obserwacja:

$$[F_\Phi]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}'} = a_{ij} \quad \text{to} \quad a_{ij} = \langle e_i, F_\Phi f_j \rangle = \Phi(e_i, f_j)$$

gdzie $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ $\quad \mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\Phi(x, y) = \Phi\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j f_j\right) = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$$

Przypadek $X = Y$

Def: Niech $\Phi \in L(X, X, \mathbb{K})$. Mówimy, że:

(1) Φ jest symetryczna jeśli: $\Phi(x, \tilde{x}) = \Phi(\tilde{x}, x)$

(2) –"– antysymetryczna jeśli: $\Phi(x, \tilde{x}) = -\Phi(\tilde{x}, x)$

Stwierdzenie:

Niech $\Phi \in L(X, X, \mathbb{K})$. Wówczas istnieją $\Phi_a, \Phi_s \in L(X, X, \mathbb{K})$ t, że

Φ_s jest symetryczna

Φ_a jest antysymetryczna

oraz $\quad \Phi = \Phi_a + \Phi_s$

~~Ponadto~~ Φ_a i Φ_s są jednoznacznie wyznaczone

Dowód:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a(x,\tilde{x}) &= \tfrac{1}{2}\left(\Phi(x,\tilde{x}) - \Phi(\tilde{x},x)\right) \\ \Phi_s(x,\tilde{x}) &= \tfrac{1}{2}\left(\Phi(x,\tilde{x}) + \Phi(\tilde{x},x)\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi = \Phi_a + \Phi_s$$

Notacja:

Jeśli $\Phi \in L(X,X,\mathbb{K})$ oraz $\mathcal{E}$ jest bazą X to macierzą Φ w bazie $\mathcal{E}$ nazywamy macierz $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}$ i oznaczamy symbolem $[\Phi]_{\mathcal{E}}$

Niech $[\Phi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}]$. Φ jest

<u>symetryczna</u> gdy $a_{ij} = a_{ji}$

<u>antysymetryczna</u> gdy $a_{ij} = -a_{ji}$

Zmiana macierzy formy dwuliniowej przy zmianie bazy

$A = [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ $\quad A^T = [id_X]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{F}'}$. Wówczas $[\Phi]_{\mathcal{F}} = A \cdot [\Phi]_{\mathcal{E}} A^T$

Formy kwadratowe.

np. :
(dla $X=\mathbb{R}^n$) $\qquad \mathbb{R}^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \in \mathbb{R} \quad$ gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Ogólniej: Niech $\Phi \in L(X, X, \mathbb{K})$

Rozważmy funkcję $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $\varphi(x) = \Phi(x,x)$.

Def.: Φ j.w. Wówczas φ nazywamy formą kwadratową stowarzyszoną z Φ.

Obserwacja:

$$\text{Jeśli } \Phi = \Phi_a + \Phi_s \text{ to } \varphi(x) = \underbrace{\Phi_a(x,x)}_{0} + \Phi_s(x,x) = \Phi_s(x,x)$$

$$\varphi(x+\tilde{x}) = \Phi_s(x+\tilde{x}, x+\tilde{x}) = \Phi_s(x,x) + \Phi_s(\tilde{x},\tilde{x}) + 2\Phi_s(x,\tilde{x})$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_s(x,\tilde{x}) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\varphi(x+\tilde{x}) - \varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\right)}_{\text{formuła polaryzacyjna}}$$

Stwierdzenie

Niech $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Wówczas φ jest formą kwadratową $\Leftrightarrow$

(1) $\varphi(\alpha . x) = \alpha^2 \varphi(x) \quad \forall x \in X$ i $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

(2) Odwzorowanie $X \times X \ni (x, \tilde{x}) \longmapsto \frac{1}{2}\left(\varphi(x+\tilde{x}) - \varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\right)$

jest formą dwuliniową na X (symetryczną)

Dowód: φ - jest formą kwadratową to φ spełnia (1) i (2)

W drugą stronę:

rozważmy $\Phi(x,\tilde{x}) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+\tilde{x}) - \varphi(x) - \varphi(\tilde{x})\right)$

wtedy Φ jest dwuliniowa oraz $\Phi(x,x) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\varphi(2x)}_{4\varphi(x)} - \varphi(x) - \varphi(x)\Big) = \varphi(x)$

Def.: Macierzą formy kwadratowej φ w bazie $\mathcal{E}$ nazywamy macierz $[\Phi]_{\mathcal{E}}$. Bazę w której macierz φ jest diagonalizowalna nazywamy bazą diagonalizującą.

Jeśli $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ jest bazą X oraz

$\cancel{\mathcal{E}'(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$

$\mathcal{E}' = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jest bazą sprzężoną i

$[\Phi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}]$ to $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} \psi_i \psi_j$

$\left(\varphi(x) = \sum a_{ij} \psi_i(x) \psi_j(x) \right)$ tzn.

TWIERDZENIE (Lagrange'a)

Niech φ będzie formą kwadratową na X. Wówczas istnieje baza diagonalizująca φ.

dowód:

Niech $\mathcal{E}' = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ $\quad \varphi = \sum_{i,j} a_{ij} \psi_i \psi_j$

przypadek I

Jeśli $\exists\, i : a_{ii} \neq 0$ (np. a_{11})

$\left(x^2 - 4xy + 5y^2 = (x-2y)^2 + y^2 \right)$

nową bazą $x-2y$ i y

Wprowadźmy $\eta_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{i=2}^{n} a_{1i} \psi_i$

Zauważmy, że $(\eta_1, \psi_2, \dots \psi_n)$ też jest bazą $\mathcal{E}'$

$$\varphi = a_{11} \cdot \eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} \psi_i \psi_j$$

przypadek $\underline{II}$

Jeśli $a_{ii} = 0$ Wówczas: $a_{ij} \neq 0$ dla jakiegoś $j \neq i$ (np. $i=1, j=2$)

$\eta_1 = \psi_1 + \psi_2$ $\quad\quad$ $\eta_2 = \psi_1 - \psi_2$

$$\psi_1 \psi_2 = \frac{1}{4} (\eta_1^2 - \eta_2^2)$$

Biorąc bazę $(\eta_1, \eta_2, \psi_3, \dots, \psi_n)$ dostaję niezerowy współczynnik przy η_1^2 i $\varphi = \frac{a_{12}}{2} \eta_1^2 + \dots$

Czyli przez zmianę bazy sprowadzamy do przyp. 1.

$$x \cdot y = \frac{1}{4} \Big(\underbrace{(x+y)}_{\eta_1}^2 - \underbrace{(x-y)}_{\eta_2}^2 \Big)$$

W

Przypomnienie: X - przestrzeń nad $\mathbb{K}$

Rozważmy formy kwadratowe $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \rightsquigarrow \Phi: X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ - forma dwuliniowa symetr.

$\varphi(x) = \Phi(x,x)$, $\Phi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y))$

Macierz formy kw. w bazie $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

$$[\varphi]_e \stackrel{def}{=} [\Phi]_e = [\Phi(e_i, e_j)]$$

Tw. Lagrange'a: $\exists$ baza $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - diagonalizująca

$\varphi: [\varphi]_e = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; $\lambda_i \in \mathbb{K}$

Niech $\mathcal{E}' = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ - baza dualna do $\mathcal{E}$.

$(\varphi_i \in X')$. Wówczas $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \varphi_i^2$ gdzie

$\varphi_i^2(x) \stackrel{df}{=} (\varphi_i(x))^2$ $\qquad \varphi_i^2 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ - forma kwadr.

dalsze "obróbka" bazy diagonalizującej:

Przypadek zespolony $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Niech $\sqrt{\lambda_i}$ - jeden z pierwiastków $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Wówczas $\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i}\, \varphi_i)^2$

Biorąc bazę $\mathcal{F} = (\underbrace{\sqrt{\lambda_1}\, \varphi_1}_{\varphi_1'}, \underbrace{\sqrt{\lambda_2}\, \varphi_2}_{\varphi_2'}, \dots, \underbrace{\sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n}_{\varphi_n'})$ dostajemy

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i')^2$$

Uwaga: Jeśli $\lambda_i = 0$ to kładziemy $\varphi_i = \varphi$

Jeśli $\lambda_i \neq 0$ — " — $\varphi_i' = \sqrt{\lambda_i}\, \varphi_i$

Wtedy $\mathcal{F}' = (\varphi_1', \dots, \varphi_n')$ jest bazą diagonalizującą

$[\varphi]_{\mathcal{F}^*}$ ma na diagonali 1 i 0.

2 przypadek (rzeczywisty) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (2)

Jeśli $\lambda_i = 0$ to kładziemy $\psi_i' = \psi_i$

Jeśli $\lambda_i \neq 0$ –"– $\psi_i' = \sqrt{|\lambda_i|} \cdot \psi_i$

W nowej bazie $\mathcal{F}' = (\psi_1', \dots, \psi_n')$ ~~mamy~~ macierz formy $[\varphi]_{\mathcal{F}}$ ma na diagonali samo $+1, 0, -1$

Bez straty ogólności założymy, że

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} (\psi_i')^2 - \sum_{i=1}^{q} (\psi_{p+i}')^2$$

p i q nie zależy od wyboru bazy

~~Def~~:

Tw. (Sylwestera o bezwładności)

Niech X – p-ń wek. nad $\mathbb{R}$ oraz $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Niech $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ oraz $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ bazy X i $\mathcal{E}' = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ i $\mathcal{F}' = (g_1, \dots, g_n)$ będą odpowiednimi bazami sprzężonymi. Przypuśćmy, że $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \psi_i^2 - \sum_{i=1}^{q} \psi_{i+p}^2$ oraz $\varphi = \sum_{i=1}^{r} g_i^2 - \sum_{i=1}^{s} g_{i+r}^2$. Wówczas $p = r$, $q = s$

def: Niech φ, $\mathcal{E}$ – j.w. Parę liczb (p, q) nazywamy sygnaturą formy kwadratowej φ.

Uwaga: (~~rząd~~) : $\operatorname{rk}[\varphi]_{\mathcal{E}} = \text{rząd } \varphi$

Biorąc bazę $\mathcal{E}$ j.w. mamy $[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{p} & \\ & \overbrace{-1 \ \cdots \ -1}^{q} \end{bmatrix}$

$\operatorname{rk} \varphi = p + q$ rząd nie zależy od wyboru bazy (to wiemy przed udowod. tw. S.)

Dowód tw. Sylwestera:

Obserwacja: $p+q = r+s = r\kappa\varphi$. ~~Wsp. ta~~

~~Przypuśćmy~~ Wystarczy pokazać, że $p=r$

Przypuśćmy: $p \neq r$ $\quad p<r$

Rozważmy odwzorowanie liniowe $T: X \longrightarrow \mathbb{R}^{n-(r-p)}$ $\quad n-r+p$

t, że

$$Tx = \begin{bmatrix} \langle \psi_1, x\rangle \\ \langle \psi_2, x\rangle \\ \langle \psi_p, x\rangle \\ \langle g_{r+1}, x\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, x\rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+n-r}$$

$p+n-r$ skalarów

$$\dim \mathbb{R}^{p+n-r} = n + \underbrace{p-r}_{\text{ujem.}} < \underset{\dim X}{\overset{\|}{n}}$$

$p-r<0$

Rachunek wymiarów: $\underset{n}{\overset{\|}{\dim X}} = \dim\ker T + \underset{\text{(Obraz)}}{\dim \operatorname{Ran} T}$ $< n$ $\Rightarrow \dim\ker T > 0$

$\underset{x_0 \in X}{\exists}\ x_0 \neq 0$ oraz $T(x_0)=0$

$\langle \psi_i, x_0\rangle = \psi_i(x_0) = 0$ dla $i=1,\dots,p$

$\langle g_j, x_0\rangle = g_j(x_0) = 0$ dla $j=r+1,\dots,n$

To daje z jednej strony $\varphi(x_0) = \underset{\overset{\|}{0}}{\sum_{i=1}^{p} \psi_i(x)^2} - \sum_{i=1}^{q} \psi_{p+i}(x)^2 \leq 0$

a z drugiej $\varphi(x_0) = \underset{\overset{\|\!\vee}{0}}{\sum_{i=1}^{r} (g_i(x_0))^2} - \underset{\overset{\|}{0}}{\sum_{i=1}^{s} (g_{i+r}(x_i))^2}$ skoro 0 to

Stąd

$\Rightarrow \varphi(x_0)=0 \Rightarrow g_i(x_0)=0$ dla $i=1,\dots,r$

$\Rightarrow g_i(x_0)=0 \quad i=1,\dots,n \Rightarrow x_0 = \sum g_i(x_0)\cdot f_i = 0$ sprzeczność

~~Czyli~~ p nie jest mniejsze niż r. Podobnie r nie może być mniejsze niż p (symetr. sytuacja) $\Rightarrow \boxed{p=r}$

Szukanie sygnatury metodą Jacobiego

Szukamy sygnatury : z grubsza znalezienie bazy diagonalizującej

Kontekst: $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ - forma kwadratowa

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - baza X

$[\varphi]_{\mathcal{E}} = [\varphi_{ij}] = [\Phi(e_i, e_j)]$

Niech $D_i = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i1} & \dots & \varphi_{ii} \end{bmatrix}$

Załóżmy, że $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \dots, D_n \neq 0$

TW. $\varphi, \mathcal{E}, D_i$ - j.w. Wówczas $\exists$ baza $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ - p.m. X taka, że $[\varphi]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2/D_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_n/D_{n-1} \end{bmatrix}$ - macierz diag.

W szczególności jeśli $\overset{\text{sygnatura}}{\operatorname{sgn}} \varphi = (p, q)$ to p jest równe liczbie dod. elementów ciągu $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$ oraz q odpowiednio ujemnych.

Dowód:

Notacja: $\det \begin{bmatrix} \varphi_{11}, & \dots, & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-1,1} & \dots, & \varphi_{i-1,i} \\ e_1, & \dots, & e_i \end{bmatrix} \in X$ który definiujemy biorąc formalne rozwinięcie Laplace'a wzgl. ostatniego wiersza.

np.: $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix} = e_2 - e_1$

Okazuje się, że $\mathcal{F}$ można zdef. następująco:

$f_1 = e_1$ oraz dla $i > 1$ kładziemy $f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \cdot \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1i} \\ \vdots & & \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,i} \\ e_1 & \dots & e_i \end{bmatrix}$

dlaczego $\mathcal{F}$ jest bazą?

f_i - jest kombinacją liniową ~~coś~~ e_i

$f_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle$

$f_i = e_i + x$ gdzie $x \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$

$\mathcal{F}$ jest bazą bo ~~...~~ $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle f_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \langle f_1, f_2, e_3, \dots, e_n \rangle =$
pr. rozpięta przez $e_1, \dots, e_n$
$\dots = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \Leftarrow$ baza X

dalej zauważmy, że

$$\Phi(f_i, e_j) = \begin{cases} 0 & j < i \\ \frac{D_i}{D_{i-1}} & j = i \end{cases}$$

w takim razie $\Phi(f_i, f_j) = \Phi(f_i, e_j + x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j < i, \\ \frac{D_i}{D_{i-1}} & \text{dla } j = i \end{cases}$

(bo $f_j = e_j + x \quad x \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$)

$j = i$ mamy $\Phi(f_i, e_i + x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle}}{=} \Phi(f_i, e_i) = \frac{D_i}{D_{i-1}}$.

To kończy dowód bo:

$$[\varphi]_F = [\Phi(f_i, f_j)] = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2/D_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix}$$