I

3.04.2012

$$= e \cdot P_{\lambda_1} + e^{-1}(\mathbb{1} + A + \mathbb{1})\, P_{\lambda_2}$$

Przestrzenie z iloczynem skalarnym

$(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C})$

(1) Na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rozważmy funkcje:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longmapsto (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

(2) Na $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ rozważmy funkcje:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z,w) \longmapsto (z|w) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\, w_i \in \mathbb{C}$$

Są to przykłady iloczynów skalarnych

Notacja: niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Wówczas $\lambda \geq 0$ oznacza, że $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ oraz $\lambda \geq 0$.
(w zwykłym sen

niech $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $\bar{t} = t$ oraz $Re(t) = t$

Def.: Niech X będzie p-nią wektorową nad $\mathbb{K}$. Mówimy, że funkcja:

$X \times X \ni (x,y) \longmapsto (x|y) \in \mathbb{K}$ jest iloczynem skalarnym na X, jeśl

(1) $\forall x \in X$ funkcja $X \ni y \longmapsto (x|y) \in \mathbb{K}$ jest liniowa

(2) $\forall x, y \in X$ mamy $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(3) $\forall x \in X$ mamy $(x|x) \geq 0$

(4) Jeśli $(x|x) = 0$ to $x = 0$

Przykład nieskończenie wymiarowy

$X = C[-\pi, \pi]$ – funkcje ciągłe na $[-\pi, \pi]$ o wartościach zespolonych. Definiujemy:

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

Uwaga: dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ parę $(X, (\cdot|\cdot))$ nazywamy p-nią euklidesową

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(X, (\cdot|\cdot))$ –"– p-nią unitarną.

Niech $x \in X$. Wówczas liczbę dodatnią $(x|x)^{\frac{1}{2}}$ nazywamy długością wektora x i ozn. symbolem $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

np.: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$ $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt}$

Tożsamości polaryzacyjne

Stwierdzenie:

(1) Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(X, (\cdot|\cdot))$ - p-ń euklidesowa

Wówczas: $(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

(2) Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(X, (\cdot|\cdot))$ – p-ń unitarna

Wówczas $(x|y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k} \|y + i^k x\|^2$

dowód (1): $\|x+y\|^2 = (x+y \,|\, x+y) \overset{\text{liniowe}}{=} (x|x) + (y|y) + (x|y) \overset{\S}{+} (y|x) =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$

Iloczyn skalarny dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ jest forma dwuliniową symetryczną dodatnio określoną (ściśle)

$(x|x) > 0$ dla $x \neq 0$

dowód (2):

uwaga: $\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{C}}$ $\quad (x|y)=\overline{(y|x)}$ $\quad$ w szczególności:

$$(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2|y)=\overline{\lambda_1}(x_1|y)+\overline{\lambda_2}(x_2|y)$$

$k=0$ $\quad \|x+y\|^2=(x+y|x+y)=(x|x)+(y|y)+(x|y)+(y|x)$

$k=1$ $\quad i\|y+ix\|^2=i(y+ix|y+ix)=i(y|y)+i(x|x)+i\cdot i(y|x)+i(-i)(x|y)$

$k=2$ $\quad -1\cdot\|y-x\|^2=-(y|y)-(x|x)+(x|y)+(y|x)$

i^3 $\quad k=3$ $\quad -i\|y-ix\|^2=-i(y-ix|y-ix)=-i(y|y)-i(x|x)-(y|x)+(x|y)$

$+$

$$(y|y)\cdot 0+(x|x)\cdot 0+(x|y)\cdot(1+1+1+1)+(y|x)\cdot 0$$

$$\parallel$$

$$4(x|y)$$

Układy ortogonalne i ortonormalne

Def: $(X,(\cdot|\cdot))$ – p-ń z iloczynem skalarnym. Mówimy, że układ $(x_1,\dots,x_k)$ niezerowych wektorów jest ukł. *ortogonalnym* jeśli $(x_i|x_j)=0$ dla $i\neq j$

a *ortonormalnym* jeśli jest ortogonalny oraz $(x_i|x_i)=1$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$

Oczywiście układ ortonormalny który jest bazą, nazywany bazą ortonormalną. Od tej pory zakładamy, że p-ń jest sk.-wymiarowa.

np. baza standardowa jest bazą ortonormalną dla

$\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (patrz. przykłady)

(ortogonalności zależy od il. sk.)

Obserwacja: Niech $(x_1, \dots, x_n)$ będzie bazą ortonormalną p-ni X

(Narazie nie wiemy czy takie bazy istnieją - później)

~~Odwzraz~~

Szukanie współczynników rozkładu w tej bazie polega na liczeniu odpowiednich iloczynów skalarnych : $x \in X$ oraz $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

to $(x_j | x) = (x_j | \sum_1^n \alpha_i x_i) = \sum_1^n \alpha_i (x_j | x_i) = \alpha_j$

ponadto jeśli $y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$ to $(y|x) = (\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k | \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) =$

antyliniowość (lin- z dokł. do sprzęże

$= \sum_{k,i=1}^{n} \overline{\beta_k} \alpha_i (x_k | x_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta_i} \alpha_i$

W przykładzie z pocz. wyk.:

$$y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

V

Istnienie baz ortonormalnych

Twierdzenie: (nierówność Bessela)

Niech $(x_1, \dots, x_k)$ będzie układem ortonormalnym. Dla $x \in X$ definiujemy skalary $\alpha_i = (x_i | x)$.

Wówczas $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$ oraz $\forall y \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$

mamy $_{(*)}$ $\left(y \,\middle|\, x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = 0$

dowód:

$$0 \leq \left\|x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \,\middle|\, x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_j \cdot \underbrace{(x | x_j)}_{\alpha_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \underbrace{(x_i | x)}_{\alpha_i} + \sum_{i,j=1}^{k} \overline{\alpha_i} \alpha_j \cdot (x_i | x_j) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2$$

to $(*)$ wystarczy sprawdzić dla $y = x_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$

$$(x_j | x - \Sigma \alpha_i x_i) = \underbrace{(x_j | x)}_{\alpha_j} - \underbrace{(x_j | \Sigma \alpha_i x_i)}_{\alpha_j} = 0$$

Wniosek: Nierówność Cauchy-Schwarza → nierówność Bessela dla $k = 1$

x_1, $\alpha_1 = (x_1 | x)$ wówczas jeśli $\|x_1\| = 1$ (ukł. ortonorm. z jednego

to $|\alpha_1|^2 \leq \|x\|^2$

$$\Updownarrow$$

$$|(x_1 | x)| \leq \|x\|$$

Ogólniej: $\forall x, y \in X$ mamy $|(y|x)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ bo • jeśli $y = 0$

~~$y \neq 0$~~ ~~mamy~~ to $(y|x) = 0$ (bo lin. ze wzgl. na x
antylin. ze wzgl. na y)

oraz $\|x\| \cdot \|y\| = 0$

- jeśli $y \neq 0$ $\left|\left(\frac{y}{\|y\|} \,\middle|\, x\right)\right| \leq \|x\| \Rightarrow |(y|x)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

DAN-MARK

VI

Ortonormalizacja Gramma-Schmidta

Niech $(y_1, \dots, y_k)$ będzie układem liniowo niezależnym. Wówczas $\exists$ układ ortonormalny $(x_1, \dots, x_k)$ t. że $\forall\, l < k$ mamy $\langle x_1, \dots, x_l \rangle = \langle y_1, \dots, y_l \rangle$ oraz x_l jest prostopadły do $\langle y_1, \dots, y_{l-1} \rangle$.

Def: Niech $S \subseteq X$ będzie podzbiorem. Mówimy, że $x \in X$ jest prostopadły do S jeśli $(s|x) = 0$ $\forall\, s \in S$.

Zb. wektorów prostopadłych do S ozn. $S^{\perp}$.
($S^{\perp}$ - p-ń wek.)

Ortonormalizacja G-S

procedura indukcyjna:

$l=1$: $x_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$

Mając $x_1, \dots, x_{l-1}$ definiujemy $\tilde{x}_l$ wzorem $\tilde{x}_l = y_l - \sum_{i=1}^{l-1} (x_i | y_l) x_i$

z tw. o nierówności Bessela mamy:

~~[illegible]~~ $\tilde{x}_l = \langle x_1, \dots, x_{l-1} \rangle^{\perp} = \langle y_1, \dots, y_{l-1} \rangle^{\perp}$

definiujemy $x_l = \dfrac{\tilde{x}_l}{\|\tilde{x}_l\|}$. Wówczas $\langle y_1, \dots, y_l \rangle = \langle x_1, \dots, x_l \rangle$

oraz układ $(x_1, \dots, x_l)$ jest ortonormalny.

Stosując ortonormalizację Gramma-Schmitta do bazy $(y_1, \ldots, y_n)$ p-ni X dostajemy bazę ortonormalną $(x_1, \ldots, x_n)$ p-ni X. Mamy istnienie bazy ortonormalnej.

I

W — 17.04.2012

Ortogonalizacja G-S ⇒ istnieje baza ortonormalna tzn.:

$\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$ t, że $(x_i | x_j) = \delta_{ij}$

W bazie ortonormalnej:

$y = \sum \alpha_i x_i \qquad z = \sum \beta_i x_i$

$$(y|z) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\, \beta_i$$

Nierówność Schwarza:

$$\|(x|y)\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

Stwierdzenie: (nierówność Minkowskiego)

Niech X - p-n z iloczynem skalarnym
$x, y \in X$. Wówczas:

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ nierówność trójkąta dla norm

Wniosek: $X \ni x \longmapsto \|x\| \equiv (x|x)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+$ jest normą X. (każda p-n z il.s. unormowana)

dowód:

$$\|x+y\|^2 = (x+y | x+y) = (x|x) + (y|y) + (x|y) + (y|x) =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \underset{\substack{\text{nier.}\\ \text{Schwarza}}}{\leqslant} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| =$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Metrykę d na X wprowadzamy wzorem $d(x,y) = \|x-y\|$

II

Rozkład X na sumę prostą podprzestrzeni wzajemnie ortogonalnych.

Def.:

Niech $Y \subseteq X$ będzie podprzestrzenią X. Wówczas zbiór: $\{x \in X : (y|x) = 0 \quad \forall y \in Y\}$ jest również podprzestrzenią którą oznaczamy symbolem $Y^{\perp}$.

Stwierdzenie: $(\dim X < \infty)$

Niech $Y \subseteq X$ będzie podprzestrzenią X. Wówczas:

(1) $X = Y \oplus Y^{\perp}$

(2) $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$

dowód:

Niech $\{y_1, \dots, y_k\}$ będzie bazą ortonormalną Y.

Dowodząc nier. Bessela pokazaliśmy, że:

$$\forall x \in X \quad \cancel{x - \sum_{i=1}^{k} (y_i|x) y_i} \quad x - \sum_{i=1}^{k} (y_i|x) y_i \in Y^{\perp}$$

Stąd $$\cancel{x} = \underbrace{x - \sum_{i=1}^{k} (y_i|x) y_i}_{\in Y^{\perp}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (y_i|x) y_i}_{\in Y}$$

Pozostało wykazać, że $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$. Jeśli $x \in Y \cap Y^{\perp}$ (x – prostopa do samego

$(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (tylko wek. zerowy)

Stąd $X = Y \oplus Y^{\perp}$

Definicja:

Rzut $P \in L(X)$ t, że $P(y + y^\perp) = y$ jest nazywany rzutem ortogonalnym na Y.

skoro $\overset{\text{Im}}{\overset{\shortparallel}{\text{Ran}\,P}} = Y$ oraz $\ker P = Y^\perp \Rightarrow \text{Ran}\,P = (\text{Ker}\,P)^\perp$

Lemat ~~[illegible]~~ Riesza

Niech X będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym oraz $\psi \in X'$ – prz. sprzężone.

Wówczas $\exists!\, y \in X$ t, że $\langle \psi, x \rangle = (y|x) \quad \forall x \in X$

dowód:

① Jeśli $\psi = 0$ to kładziemy $y = 0$.

② Jeśli $\psi \neq 0$: (niech $Y = \text{Ker}\,\psi$)

skoro $X = Y \oplus Y^\perp$ oraz $\dim \text{Ker}\,\psi = \dim X - 1$

$\Rightarrow \dim Y^\perp = 1$

Niech $y_0 \in Y^\perp$, $\|y_0\| = 1$

Okazuje się, że $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$: $y = \lambda y_0$ spełnia teza lematu.

Jeśli $\overset{\neq 0}{\tilde{y}} \in Y^\perp$ to $\tilde{y} = \mu \cdot y_0$ dla $\mu \in \mathbb{C}$, oraz

$$\langle \psi, \tilde{y} \rangle = (\lambda y_0 | \mu y_0)$$

$$\shortparallel$$

$$\mu \cdot \langle \psi, y_0 \rangle = \bar{\lambda} \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \langle \psi, y_0 \rangle$$

$$\lambda = \overline{\langle \psi, y_0 \rangle}$$

Jeśli teraz $x \in Y = \ker \Psi$ to:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\langle \Psi, x \rangle} = (\lambda y_0 | x) = \bar{\lambda}(y_0 | x) = 0$$

Pokazaliśmy już, że $\langle \Psi, \tilde{y} \rangle = (\lambda y_0 | \tilde{y})$ i skoro $X = Y \oplus Y^\perp$ to

$$\langle \Psi, x \rangle = (\lambda \cdot y_0 | x) \quad \forall x \in X.$$

$$y = \overline{\langle \Psi | y_0 \rangle} \cdot y_0$$

~~Wniosek~~ **Jednoznaczność y:**

~~Dow~~

Przypuśćmy, że $y_1, y_2 \in Y$ spełniają $\langle \Psi, x \rangle = (y | x)$. Wówczas $(y_1 - y_2 | x) = 0$. Kładąc $x = y_1 - y_2 \Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 = 0$

czyli: $y_1 = y_2$

WNIOSEK:

X – p-ń z iloczynem skalarnym:

Niech $\Phi : X \longrightarrow X'$ t., że $\langle \Phi(y), x \rangle = (y | x)$

Φ – bijekcja, antyliniowa

$$\Phi(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 \Phi(y_1) + \bar{\alpha}_2 \Phi(y_2)$$

Twierdzenie

Niech X, Y będą p-mi z il. skalarnym nad $\mathbb{K} = \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$ i niech $T \in L(X, Y)$. Wówczas $\exists!\ T^* \in L(Y, X)$ t., że

$$(y | Tx)_Y = (T^* y | x)_X$$

$\forall$ $\in Y$ $\in X$

V

<u>dowód</u>:

skoro odwzorowanie : $X \ni x \longmapsto (y|Tx) \in \mathbb{K}$ jest liniowe to

$\exists!$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{lemat}\\ \text{Riesza}\end{smallmatrix}\right)$ $\tilde{x} \in X$ t, że $(y|Tx) = (\tilde{x}|x)$

Kładziemy $T^{*}y = \tilde{x}$

$T^{*} \in L(Y,X)$.

T^{*} nazywamy **sprzężeniem hermitowskim** transpozycja + spr. zesp.

Własności:

(1) $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)^{*} = \bar{\alpha}_1 \cdot T_1^{*} + \bar{\alpha}_2 T_2^{*}$ $\quad \forall_{T_1, T_2 \in L(X,Y)}$

(2) $(T^{*})^{*} = T$

(3) $S \in L(X,Y)$, $T \in L(Y,Z)$ to:

$(T \circ S)^{*} = S^{*} \circ T^{*}$

d.(3): $T \circ S \in L(X,Z)$: $\quad (z|(T\circ S)x) =$

$= (z|T(Sx)) = (T^{*}z|Sx) = (S^{*}T^{*}z|x) =$

$= ((T\circ S)^{*}z|x)$

Wyrażenie w bazie ort.

Niech $T \in L(X)$ oraz $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$ - baza ort.

Niech $A = [\alpha_{ij}] = [T]_{\mathcal{E}}$

$\alpha_{ij} = (x_i|Tx_j)$ $\quad \alpha_{ij}$ – macierz operatora w bazie ort.

Niech $B = [\beta_{ij}] = [T^*]_{\varepsilon}$

$$\beta_{ij} = (x_i | T^* x_j) = \overline{(T^* x_j | x_i)} = \overline{(x_j | T x_i)} = \overline{\alpha_{ji}}$$

Definicja:

Niech $T \in L(X)$, gdzie X jest p-nią z iloczynem skalarnym.

Mówimy, że:

(1) T jest hermitowski (samosprzężony) jeśli $T^* \equiv T$

(2) T jest unitarny jeśli $T^*T = 1 = TT^*$

(3) T jest normalny jeśli $T^*T = TT^*$

Stwierdzenie:

Niech $P \in L(X)$ będzie rzutem. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(1) $(\ker P)^{\perp} = \operatorname{Ran} P$ rzut prostopadły $\Updownarrow$ jest samosprzężony

(2) $P^* = P$

Dowód:

(1) ⇒ (2) $(x | Py) \overset{?}{=} (Px | y)$ $\forall x, y \in X$

$x = x_1 + x_2 \in \ker P \oplus \operatorname{Ran} P$ $(x | Py) = (x_1 + x_2 | \underset{y_2}{Py}) = (x_1 + x_2 | y_2) = (x_2 | y_2)$ $x_1 \perp y_2$

$y = y_1 + y_2 \in$ —"—

$(Px | y) = (x_2 | y_1 + y_2) = (x_2 | y_2)$

(2) ⇒ (1)

Zał.: $(x | Py) = (Px | y)$

Niech $x \in \ker P$. Wówczas $Px = 0 \Rightarrow \forall y \in X$ mamy

$(\underset{0}{Px} | y) = (x | Py)$

$\Rightarrow x \in (\operatorname{Ran} P)^{\perp}$ p-ń prostopadła do obrazu P

Czyli $\ker P \subseteq (\operatorname{Ran} P)^{\perp}$

W drugą stronę: jeśli $x \in (\operatorname{Ran} P)^{\perp}$

$$(Px|y) \underset{x \perp \text{obraz } P}{=} (x|Py) = 0 \quad \forall y \in X$$

Kładąc $y = Px$ i korzystając z tego, że $P^2 = P$ dostajemy

$$(Px|Px) = (x|P^2x) = (x|Px) = 0$$

$$\Rightarrow Px = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} P$$

Stwierdzenie ($\dim X < \infty$)

$T \in L(X)$ jest unitarny $\iff \forall_{x \in X} \|Tx\| = \|x\|$ (nie zmienia długości wektora)

dowód:

$\boxed{\Rightarrow}$ $T^*T = 1 = TT^* \Rightarrow \|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (x|T^*Tx) = (x|x) = \|x\|^2$

$\boxed{\Leftarrow}$ (tożsamość polaryzacyjna)

$$\|Tx\| = \|x\| \Rightarrow \forall x \in X \ (x|T^*Tx) = (x|x)$$

$$\Rightarrow (x|(T^*T-1)x) = 0 \Rightarrow \forall x, y \in X \ (y|(T^*T-1)x) = 0$$

Kładąc $y = (T^*T-1)x \Rightarrow \|(T^*T-1)x\| = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T^*T = 1}$$

$$\dim X < \infty \Rightarrow \det(\underset{\overset{\|}{\det T^* \cdot \det T}}{T^*T}) = \det 1 = 1 \Rightarrow \det T \neq 0 \Rightarrow T\text{-}\overset{\text{op}}{\text{odwracalny}}$$

I

Z jednoznaczności odwrotności

$T^* = T^{-1}$ oraz $TT^* = TT^{-1} = 1$

W **24.04.2012**

X - p-ń wektorowa nad $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$, $\dim X < \infty$

$(\cdot|\cdot): X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$

Sprzężenie hermitowskie: $T \in L(X)$, $T^* \in L(X)$: $(x|Ty) = (T^* x|y)$

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna

$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [\alpha_{ij}]$

$[T^*]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [\beta_{ij}]$ $\qquad \beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$

Operatory normalne $\quad T^*T = TT^*$

→ **Stwierdzenie** $(X, (\cdot|\cdot))$ - j.w. oraz $T \in L(X)$. Wówczas **T jest operatorem normalnym $\Leftrightarrow$**
$\Leftrightarrow \forall_{x \in X} \ \|Tx\| = \|T^*x\|$

$\boxed{\Rightarrow}$ skoro $T^*T = TT^*$ to $\forall x \in X$ mamy $\overset{\overset{\|Tx\|^2}{\|}}{\overset{(Tx|Tx)}{\|}}\!\!\!\!\!\!\!(x|T^*Tx) = (x|TT^*x) =$

$= (T^*x|T^*x) = \|T^*x\|^2$

(*) $\boxed{\Leftarrow}$ $\quad \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = (T^*x|T^*x) = (x|TT^*x)$

$\quad\quad \|$

$\quad (Tx|Tx)$

$\quad\quad \|$

$\quad (x|T^*Tx)$

Tożsamość polaryzacyjna: $(x|y) = \frac{1}{4}\sum i^k \|y + i^k x\|^2$

Ogólniej: def: X - p-ń nad $\mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja

$\psi: X \times X \to \mathbb{C}$ jest forma $\frac{3}{2}$-liniową jeśli ψ jest liniowa w ~~jednym~~ drugim argumencie

oraz $\psi(x,y) = \overline{\psi(y,x)}$ $\qquad\qquad \downarrow$

$\psi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) =$

$= \alpha_1 \psi(x, y_1) + \alpha_2 \psi(x, y_2)$

Fakt (tożsamość polaryzacyjna)

$\psi(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (y + i^k x, y + i^k x)$ – dowód jak dla iloczynu skalarnego

Wniosek:

Jeśli Ψ_1, Ψ_2 – formy $\frac{3}{2}$ liniowe oraz $\Psi_1(x,x) = \Psi_2(x,x)$ $(\forall x \in X)$

to $\forall x,y \in X$ mamy $\Psi_1(x,y) = \Psi_2(x,y)$

(*) $\boxed{\Leftarrow}$ Wracając do dowodu $\Leftarrow$ z def. formy $\frac{3}{2}$-liniowe

$$\begin{cases} \Psi_1(x,y) = (x \mid T^*Ty) \\ \Psi_2(x,y) = (x, T^*T^*y) \end{cases} \qquad \Psi_1(x,x) = \Psi_2(x,x) \qquad \text{to}$$

Korzystając z powyższego wniosku mamy $\forall x,y \in X$ $(x \mid T^*Ty) = (x \mid TT$

stąd $(x \mid (T^*T - TT^*)y) = 0$, kładąc $x = (T^*T - TT^*)y$

dostajemy $\|(T^*T - TT^*)y\|^2 = 0$, a więc $T^*Ty = TT^*y$

$\forall y \in X \Rightarrow T^*T = TT^*$

Wnioski:

T – op. normalny

(1)
$$\begin{array}{ccc} x \in \operatorname{Ker} T & \Leftrightarrow & x \in \operatorname{Ker} T^* \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \|Tx\| = 0 & \Leftrightarrow & \|T^*x\| = 0 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc} Tx = \lambda x & \text{to} & T^*x = \bar{\lambda} x \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x \in \ker(T - \lambda 1\!\!1) & \Leftrightarrow & x \in \ker(T^* - \bar{\lambda} 1\!\!1) \end{array}$$

(3) P-nie własne dla różnych wartości własnych są prostopadłe

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\lambda \neq \mu \quad , \quad x \in \ker(T - \lambda \mathbb{1}) \quad , \quad y \in \ker(T - \lambda \mathbb{1})$$

$$\begin{array}{l} (x|Ty) = (T^* x|y) = (\bar{\lambda} x|y) = \bar{\bar{\lambda}}(x|y) = \lambda(x,y) \\ \quad \| \\ (x|\mu \cdot y) \\ \quad \| \\ \mu(x|y) \end{array}$$

antyliniowość w pierw. arg.

$$\Rightarrow \mu \neq \lambda \quad (\mu - \lambda)(x|y) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x|y) = 0$$

Stwierdzenie $(X, (\cdot|\cdot))$ - j.w.

(1) jeśli T jest samosprzężony $\boxed{T = T^*}$ to wart. własne T są rzeczywiste

(2) jeśli T - unitarny to wartości włas. T są liczbami o module 1

D(1) λ - wart. własna oraz $x \neq 0$ $Tx = \lambda x$

$$\lambda(x|x) = (x|\lambda x) = (x|Tx) = (Tx|x) = \bar{\lambda}(x|x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda = \bar{\lambda}}$$

D(2) T-unitarny (nie zmienia dł. wektora) , $Tx = \lambda x$, $x \neq 0$

$$\bar{\lambda}\lambda(x|x) = (\lambda x|\lambda x) = (Tx|Tx) = (x|x) \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda}\lambda = 1$$

$$(Tx|Tx) = (x|\underbrace{T^* T}_{1} x) = (x|x)$$

Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych

X - p-ń nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym

$T \in L(X)$ - operator normalny. Wówczas istnieje ortonormalna baza p-ni X składająca się z wektorów wł. op. T

W szczególności operator T jest diagonalizowalny

DOWÓD:

Indukcja ze względu na wymiar X

$n = \dim X = 1$ - oczywiste (wek. · liczba)

- prawda dla $n-1$

T - j.w. Ponieważ X jest nad $\mathbb{C}$ to operator T ma wektor własny (*)

$x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$: $Tx_0 = \lambda x_0$ (bez straty ogólności zał.: $\|x_0\| = 1$)

(*) wynika stąd, że każdy wielomian ma pierwiastek zespolony a wartości własne są pierwiastkami wiel. charakteryst.

Niech $E = \langle x_0 \rangle^{\perp} \subseteq X$, $\dim E = n-1$ bo $\dim \langle x_0 \rangle = 1$

Zauważmy, że $TE \subseteq E$ i $T^{*}E \subseteq E$

(niech $x \in E$, czy $Tx \in E$? → tak bo $(Tx|x_0) = (x|T^{*}x_0) = (x|\bar{\lambda}x_0) =$
$= \bar{\lambda}(x|x_0) = 0$)

$Tx \in E \Longleftarrow$

(podobnie z $T^{*}E \subseteq E$: $x \in E$ → $(T^{*}x|x_0) = (x|Tx_0) = \lambda(x|x_0) = 0$
bo $x \in \langle x_0 \rangle^{\perp}$)

Niech dalej $\tilde{T} \in L(E)$, $\tilde{T} = T\overset{\overline{V}}{\big|}_E$

Fakt: $\tilde{T}$ jest operatorem normalnym. łatwo spr. że $\tilde{T}^* = \tilde{T}^*\big|_E$

stąd $\tilde{T}^*\tilde{T} = T^*\big|_E T\big|_E = T^*T\big|_E = TT^*\big|_E = T\big|_E \cdot T^*\big|_E =$
$= \tilde{T}\tilde{T}^*$.

$\tilde{T}$ jest operatorem normalnym działającym na E, $\dim E = n-1$

z zał. indukcyjnego $\exists$ ortonormalna baza $\mathcal{F}$ p-ni E składająca się z wektorów wł. op. T.

Wówczas $\mathcal{E} = \{x_0\} \cup \mathcal{F}$ jest bazą ortonormalną X ułożoną z wektorów wł. T.

$\blacksquare$

Wniosek: X, T - j.w. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - w. wł. op. T

$m_1, \dots, m_k$ - krotności algebr.

T - jest diagonalizowalny: $X_{\lambda_i} := \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})$

$X = \oplus X_{\lambda_i}$ ponadto $X_{\lambda_i} \perp X_{\lambda_j}$ $\lambda_j \neq \lambda_i$

Niech P_{λ_i} - rzut jest rzutem prostopadłym, na ~~więc~~ X_{λ_i} wzdłuż $\bigoplus_{j \neq i} X_j$

Wówczas P_{λ_i} jest rzutem prostopadłym a więc P_{λ_i} jest samosprzężonym rzutem.

Dalej $\sum_{n=1}^{k} P_{\lambda_i} = \mathbb{1}_X$ oraz $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}$

W końcu, jeśli f - f-cja całkowita to:

$$f(T) = \sum_{i=1}^{k} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{skalar}}}{f(\lambda_i)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rzut}}}{P_{\lambda_i}}$$

VI

Przypadek p-ni z iloczynem skalarnym nad $\mathbb{R}$

Zauważmy, że op. T na $\mathbb{R}^2$ (ze standardowym iloczynem skalarnym) obracający wektory o kąt $\frac{\pi}{2}$ jest normalny ale nie jest diagonalizowalny

$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - jest unitarny (obrót), w szczególności normalny ale nie jest diagonalizowalny.

$$w_T(\lambda) = (\lambda^2+1) = (\lambda+i)(\lambda-i)$$

→ Tw. spektralne nie jest prawdziwe dla $\mathbb{R}$. (rzeczywistych p-ni wekt.)

TWIERDZENIE SPEKTRALNE NAD $\mathbb{R}$

Niech X będzie p-nią euklidesową z iloczynem skalarnym **nad $\mathbb{R}$**. Niech $T \in L(X)$ oraz $T^* = T$. Wtedy $\exists$ baza X złożona z wektorów wł. operatora T.

(dowód później)

Def: Kompleksyfikacja p-ni wektorowej nad $\mathbb{R}$

X - p-ń nad $\mathbb{R}$. Zdefiniujmy p-ń $X^{\mathbb{C}} = X \oplus X$ z mnożeniem przez zespolone skalary: $\underset{u,v\in\mathbb{R}}{(u+iv)}\underset{x+iy}{(x,y)} = (ux - v\cdot y, uy + vx)$

$X^{\mathbb{C}}$ jest p-nią zespoloną którą nazywamy kompleksyfikacją X.

15.05.2012

W

$(X, (\cdot|\cdot))$ - p-ń z iloczynem skalarnym nad $\mathbb{R}$ (p-ń euklidesowa)

Operator samosprzężony na $X \equiv$ op. symetryczny

Natomiast operator $T \in L(X)$ t, że $\forall x \in X$ $\|Tx\| = \|x\|$ nazywamy op. ortogonalnym

Tw. spektralne nad $\mathbb{R}$ = op. symetryczne dają ortonormalną bazę wektorów własnych, w szczególności są one diag.

Wniosek:

Niech $Q: X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową na X.

Wówczas istnieje baza $\mathcal{E}$ (o.n) p-ni X w której $[Q]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.
ortonormalna

Obserwacja:

Niech $T \in L(X)$ będzie operatorem symetrycznym. Rozważmy formę 2-liniową $b_T: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie:

$$b_T(x,y) = (x|Ty)$$

Forma b_T jest symetryczna.

$$b_T(x,y) = (x|Ty) = (Tx|y) = (y|Tx) = b_T(y,x)$$

$$Q_T(x) = b_T(x,x)$$ - forma kwadratowa

Z tw. spektralnego mamy bazę $\mathcal{E}$ o.n. wekt. wł. T:
$\shortparallel \{e_1, \dots, e_n\}$

$$[Q_T]_{\mathcal{E}} = [(e_i|Te_j)] = [\lambda_j \delta_{ij}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{E}}$$

Czy każda forma kwadratowa na X jest postaci j.w. ?

Niech Q – dowolna forma kw., b – odpowiadająca jej f. 2-liniowa.

$\forall\, \tilde{x} \in X$ rozważmy funkcjonał $X \ni x \longmapsto b(\tilde{x}, x) \in \mathbb{R}$

Z lematu Riesza $\Rightarrow \exists!\, y \in X$ t.że $b(\tilde{x}, x) = (y|x)$

Operator $T \in L(X)$ definiujemy wzorem $T\tilde{x} = y$

Własności T:

- $b(\tilde{x}, x) = (T\tilde{x}|x)$
- T jest symetryczny bo $\underset{\overset{\shortparallel}{(T\tilde{x}|x)}}{b(\tilde{x}, x)} = b(x, \tilde{x}) = \underset{\overset{\shortparallel}{(\tilde{x}|Tx)}}{(Tx|\tilde{x})}$

$\Rightarrow T = T^*$ T – symetryczny

- T – jednoznacznie wyznaczony przez b

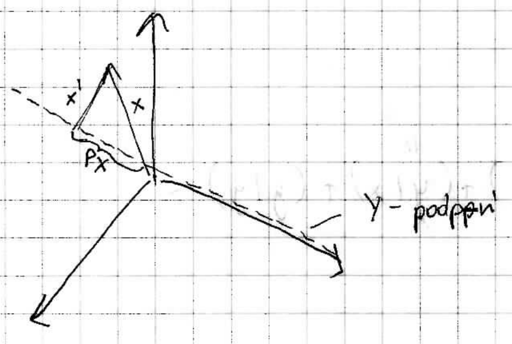
Wniosek: odwzorowanie:

$\{\text{Op. symetryczne}\} \ni T \longmapsto b_T \{\text{formy kw.}\}$ (j.w.)

zadaje izomorfizm.

Dowód (wniosku powyżej)

Niech Q, b j.w. $\exists!\, T \in L(X)$ – symetr. t.że $b = b_T$. Baza w.wł. op. T diagonalizuje Q i jest ortonormalna.



Jak zdefiniować odl. x od podp-ni Y ?

Df.: Odległość x od podp-ni $Y \subseteq X$ nazywamy liczbę nieujemną

$$d(x,Y) \overset{\text{def}}{=} \inf_{y \in Y} \|x-y\|$$

Uwaga: ~~y~~ Y - nie musi być wym. 1

Stw.:

$X, Y, x \in X$ j.w. Niech $P \in L(X)$ będzie rzutem ortogonalnym
(nieujemne p-ni z il. sk.)

na Y. Wówczas: $d(x,Y) = \|x - Px\|$

$y \in Y$

$$\|x-y\|^2 = \|\underbrace{x - Px}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{(1-P)x}_{\substack{\in \\ Y^{\perp}}}}} + \underbrace{Px+y}_{\substack{\in \\ Y}}\|^2 \underset{\text{tw. Pitagorasa}}{=} \|x-Px\|^2 + \|Px+y\|^2 \geq \|x-Px\|^2$$

Stąd $d(x,Y) = \inf \|x-y\| \geq \|x-Px\|$ ale

z drugiej strony, skoro $Px \in Y$ to $d(x,Y) = \inf_{y \in Y} \|x-y\| \leq \|x-Px\|$

$\Rightarrow$ W takim razie $\boxed{d(x,Y) = \inf\|x-y\| = \|x-Px\|}$

Lemat (tw. Pitagorasa)

$(X, (\cdot|\cdot))$ - j.w., $x, y \in X$ oraz $(x|y) = 0$ wtedy

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{(x|y)} + \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{(y|x)} + (y|y) =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Uzupełnienie (do W z 8.05.)

X - p-ń rzeczywista

$X^{\mathbb{C}}$ - kompleksyfikacja : $X^{\mathbb{C}} = X \oplus X$

Stw. $\dim X^{\mathbb{C}} = \dim X$ ← wymiar rzeczywistej p-ni wektorowej

↑ wymiar p-ni $X^{\mathbb{C}}$ jako p-ni nad $\mathbb{C}$

dowód:

$n = \dim X$ i niech $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza X

Rozważmy układ $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ wekt. p-ni $X^{\mathbb{C}}$, gdzie $f_i := (e_i, 0)$

Pokażemy, że $\mathcal{F}$ jest bazą $X^{\mathbb{C}}$.

① $\mathcal{F}$ rozpina $X^{\mathbb{C}}$

Niech $(x_1, x_2) \in X^{\mathbb{C}}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$

t. że $x_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$

$x_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$

$$(x_1, x_2) = \sum (\alpha_j e_j, \beta_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\beta_j)(e_j, 0) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\alpha_j + i\beta_j)}_{\in \mathbb{C}} f_j$$

Stąd $\mathcal{F}$ rozpina $X^{\mathbb{C}}$

Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$: $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$

$\lambda_j = \gamma_j + i\delta_j$, $\gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$\lambda_j f_j = (\gamma_j + i\delta_j)(e_j, 0) = (\gamma_j e_j, \delta_j e_j)$

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = \left(\sum \gamma_j e_j, \sum \delta_j e_j\right) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \sum \gamma_j e_j = 0 \\ \sum \delta e_j = 0 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} \gamma_j = 0 \\ \delta_j = 0 \end{array}}_{\Downarrow \; \lambda_j = 0}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ - l.n.z i $\dim X^{\mathbb{C}} = n = \dim X$

Udowodniliśmy, że $d(x,Y)=\|x-Px\|$

PROBLEM:

Niech $Y=\langle y_1,\dots,y_k\rangle$, $\{y_1,\dots,y_k\}$ - baza Y niekoniecznie ortonormalna. Wyprowadzić wzór na $d(x,Y)$ w terminach $(x|y_i)$, $(y_i|y_i)$.

Def.:

Niech $(X,(\cdot|\cdot))$ - p-ń Euklidesowa oraz $x_1,\dots,x_k\in X$ będzie układem wektorów. Miarą tego układu nazywamy liczbą rzeczywistą $\mu_k(x_1,\dots,x_k)$ zdef. indukcyjnie:

$$\mu_1(x)=\|x\|,\quad \mu_k(x_1,\dots,x_k)=\underbrace{\mu_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1})}_{\text{„podstawa"}}\cdot \underbrace{d(x_k,\langle x_1,\dots,x_{k-1}\rangle)}_{\text{„wysokość"}}$$

Def.:

Niech $(X,(\cdot|\cdot))$, $\{x_1,\dots,x_k\}$ - j.w.. Macierzą Grama układu $\{x_1,\dots,x_k\}$ nazywamy macierz rzeczywistą $G(x_1,\dots,x_k)$ zdefiniowaną następująco:

$$G(x_1,\dots,x_k)=\left[(x_i|x_j)\right]_{i,j=1,\dots,k}$$

Twierdzenie

$(X,(\cdot|\cdot))$ - j.w. $\{x_1,\dots,x_k\}$ - j.w.

Wówczas $\det G(x_1,\dots,x_n)\geqslant 0$ oraz $\mu_k(x_1,\dots,x_k)=$

$=\sqrt{\det G(x_1,\dots,x_n)}$

indukcja :

$k=1$

$$\mu_1(x) = \|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

Zał : dla k - prawdziwe

dowodzimy dla $k+1$

$$\mu_{k+1}^2(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}) = \mu_k^2(x_1,\dots,x_k)\, d(x_{k+1},\langle x_1,\dots,x_k\rangle)^2 =$$

$$= \det G(x_1,\dots,x_k)\,\|x_{k+1} - \underset{\text{P - rzut na } \langle x_1,\dots,x_k\rangle}{P}x_{k+1}\|^2 =$$

$$= \det\begin{bmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_k) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) & \dots & (x_k|x_k) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (x_{k+1}-Px_{k+1}|x_{k+1}-Px_{k+1}) \end{bmatrix} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Uwaga} \quad (x-Px|x-Px) = (x|x-Px) \\ \quad (x_j|x_{k+1}-Px_{k+1}) = 0 \quad \text{bo } x_j \perp x_{k+1}-Px_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Px_{k+1} \perp x_{k+1} \quad \text{bo} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P \text{ rzutuje na } \langle x_1,\dots,x_k\rangle^{\perp} \end{array}\right\}$$

$$= \det\begin{bmatrix} (x_1|x_1), \dots, (x_1|x_k), & \overset{=0}{(x_1|x_{k+1}-Px_{k+1})} \\ \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) \dots (x_k|x_k), & (x_k|x_{k+1}-Px_{k+1}) = 0 \\ \underset{=0}{(x_{k+1}-Px_{k+1}|x_1)}, \dots, \underset{=0}{(x_{k+1}-Px_{k+1}|x_k)}, & (x_{k+1}|x_{k+1}-Px_{k+1}) \end{bmatrix}$$

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$: $Px_{k+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$

$$= \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ -\alpha_1, & \dots & -\alpha_k & 1 \end{bmatrix}}_{\det = 1} G(x_1, \dots, x_{k+1}) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & -\alpha_k \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{\det() = 1} =$$

$= \det G(x_1, \dots, x_{k+1})$ to samo co wyznacznik macierzy Gramma

A z G   8.05.2012

Przypomnienie: twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych na zespolonych przestrzeniach z il. skalarnym

Niech $(X, (\cdot|\cdot))$ – p-ń nad $\mathbb{C}$, $T \in L(X)$ – op. normalny

Wówczas $\exists$ o.n. baza x wekt. wł. operatora T.

// o.n. – ortonormalna //

E_{λ_i} – rzut ortogonalny na przestrzeń własną V_{λ_i} op-a T

wówczas $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_{\lambda_i}$, $E^{*}_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}$, $E_{\lambda_i} E_{\lambda_j} = \delta_{ij} E_{\lambda_j}$

Pytanie: jak sformułować tw. spektralne dla rzeczywistych p-ni z il. skalarnym.

Problem: operator na $\mathbb{R}^2$ obracający o kąt $\frac{\pi}{2}$: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest normalny ale nie jest diagonalizowalny.

Udowodnimy następujące...

Twierdzenie: Niech $(X,(\cdot|\cdot))$ będzie p-nią z il. skalarnym nad $\mathbb{R}$ oraz niech $T \in L(X)$, $T^{*} = T$. Wówczas istnieje baza ortonormalna p-ni X złożona z wektorów wł. operatora T.

Przykład: $X = \mathbb{R}^2$, $(\cdot|\cdot)_{st}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas $T^{*} = T$

$Sp(T) = \{1, -1\}$ $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \{e_1, e_2\}$ – baza o.n. w. wł. T.

Kompleksyfikacja rzeczywistej p-ni wektorowej

Niech X będzie p-nią nad R.

Zdefiniujemy $X^{\mathbb{C}}$ – p-ń nad $\mathbb{C}$, którą nazywamy kompleksyfikacją X.

Jako zbiór $X^{\mathbb{C}} = X \oplus X$

Mnożenie wektorów z $X^{\mathbb{C}}$ przez skalary zespolone definiujemy następująco: $(\lambda_1 + i\lambda_2)\cdot(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)$ $\forall_{\lambda_1,\lambda_2 \in R} \ \forall_{x_1, x_2 \in X}$

Łatwo sprawdzić, że $X^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną p-nią wektorową (z naturalnym dodawaniem)

Fakt: $\underbrace{\dim X^{\mathbb{C}}}_{\text{wymiar zespolonej przestrzeni}} = \underbrace{\dim X}_{\text{wymiar rzeczywistej p-ni}}$

Stwierdzenie: Niech X, $X^{\mathbb{C}}$ - jw. $T \in L(X)$. Wówczas odwzorowanie $X^{\mathbb{C}} \ni x_1 + i x_2 \longmapsto Tx_1 + iTx_2 \in X^{\mathbb{C}}$ jest liniowe

Definicja: Operator z powyższego stwierdzenia nazywamy kompleksyfikacją operatora T i oznaczamy $T^{\mathbb{C}} \in L(X^{\mathbb{C}})$

Dowód stwierdzenia - proste, bezpośrednie sprawdzenie □.

Sprzężenie zespolone wektorów i operatorów.

Def. Niech $x \in X^{\mathbb{C}}$, $x = x_1 + ix_2$. Sprzężeniem x nazywamy wektor $x_1 - ix_2$ i oznaczamy symbolem $\bar{x} \in X^{\mathbb{C}}$.

Niech $Y \subseteq X$ będzie podprzestrzenią wektorową. Wówczas podprzestrzeń $\{\bar{y} : y \in Y\}$ nazywamy sprzężeniem Y i ~~nazywamy~~ oznaczamy symbolem $\bar{Y}$.

Niech $F \in L(X^{\mathbb{C}})$. Operator $X^{\mathbb{C}} \ni x \longmapsto \overline{F\bar{x}} \in X^{\mathbb{C}}$ nazywamy sprzężeniem F i oznaczamy $\bar{F} \in L(X^{\mathbb{C}})$.

Lemat ~~Fakt~~. Niech $Y \subseteq X^{\mathbb{C}}$ będzie podprzestrzenią $X^{\mathbb{C}}$ i przypuśćmy, że $\bar{Y} = Y$. Wówczas Y jest kompleksyfikacją podprzestrzeni ~~[illegible]~~ pewnej podprzestrzeni $Z \subseteq X$

Na odwrót: jeśli $Z \subseteq X$ jest podprzestrzenią, to $Y = Z^{\mathbb{C}}$ jest podprzestrzenią $X^{\mathbb{C}}$ t., że $\bar{Y} = Y$.

Dowód: Jeśli $Y \leq X^{\mathbb{C}}$ oraz $Y = \bar{Y}$, to definiujemy $Z = \{y \in Y ; \bar{y} = y\}$.

Np. jeśli $y \in Y$ to $z = \frac{y + \bar{y}}{2} \in Z$

Ponadto $y = \underset{\in Z}{\frac{y + \bar{y}}{2}} + i \underset{\in Z}{\frac{y - \bar{y}}{2i}}$. Stąd $Y = Z^{\mathbb{C}}$

Na odwrót: $Z \subseteq X$ to $Z^{\mathbb{C}} = \{z_1 + iz_2 ; z_1, z_2 \in Z\}$.

Stąd $\overline{Z^{\mathbb{C}}} = \{z_1 - iz_2 : z_1, z_2 \in Z\} = Z^{\mathbb{C}}$ □

Lemat: Niech $F \in L(X^{\mathbb{C}})$ oraz $\bar{F} = F$. Wówczas $\exists\, T \in L(X)$ t., że $F = T^{\mathbb{C}}$.

Na odwrót: Jeśli $F = T^{\mathbb{C}}$ dla pewnego $T \in L(X)$ to $\bar{F} = F$.

Dowód: Jeśli $\overline{F} = F$ to $\forall\, x \in X \subseteq X^{\mathbb{C}}$ mamy $Fx \in X$: $\overline{Fx} = F\overline{x} = Fx$

czyli $Fx \in X$.

Definiujemy $T \in L(X)$ wzorem $T = F|_X$

N-a odwrót: $\overline{T^{\mathbb{C}}}(x_1 + ix_2) = \overline{T^{\mathbb{C}}(x_1 - ix_2)} = \overline{Tx_1 - iTx_2} = Tx_1 + iTx_2 = T^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2)$ □

Wniosek: $\forall\, F \in L(X^{\mathbb{C}})$ mamy $\overline{\ker F} = \ker(\overline{F})$

Dowód: $x \in \overline{\ker F} \Leftrightarrow F\overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{F\overline{x}} = 0 \Leftrightarrow \overline{F}x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(\overline{F})$ □.

w szczególności $\overline{\ker T^{\mathbb{C}}} = \ker T^{\mathbb{C}}$

Kompleksyfikacja p-ni rzeczywistych z iloczynem skalarnym

$(X, (\cdot|\cdot))$

X ← rzeczywista, $(\cdot|\cdot)$ ← rzeczywisty il. skalarny

Na $X^{\mathbb{C}}$ wprowadzamy zespolony iloczyn skalarny

$(\cdot|\cdot)_{\mathbb{C}} : X^{\mathbb{C}} \times X^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ wzorem:

$$(x_1 + ix_2 | y_1 + iy_2)_{\mathbb{C}} \overset{\text{def}}{=} (x_1|x_2)_{\mathbb{R}} + (x_2|y_2)_{\mathbb{R}} + i\big((x_1|y_2) - (x_2|y_1)\big)$$

Funkcja $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{C}}$ jest iloczynem skalarnym na $X^{\mathbb{C}}$.

Stwierdzenie ① $F \in L(X)$. Wówczas $\overline{F}^* = \overline{F^*}$

② Jeśli $F = T^{\mathbb{C}}$ to $F^* = (T^*)^{\mathbb{C}}$

W szczególności jeśli $T^* = T$ to $T^{\mathbb{C}*} = T^{\mathbb{C}}$

Dowód ① – proste ćwiczenie

② $(x_1 + ix_2 | T^{\mathbb{C}*}(y_1 + iy_2))_{\mathbb{C}} =$

$= (T^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2) | y_1 + iy_2)_{\mathbb{C}} = (Tx_1 + iTx_2 | y_1 + iy_2)_{\mathbb{C}} =$

$= (Tx_1|y_1)_{\mathbb{R}} + (x_2|T^{*}y_2)_{\mathbb{R}} + i\big((Tx_1|y_2)_{\mathbb{R}} - (Tx_2|y_1)_{\mathbb{R}}\big) =$

$= (x_1|T^*y_1)_{\mathbb{R}} + (x_2|T^*y_2)_{\mathbb{R}} + i\big((x_1|T^*y_2)_{\mathbb{R}} - (x_2|T^*y_1)_{\mathbb{R}}\big)$

$= (x_1 + ix_2 | T^*y_1 + iT^*y_2)_{\mathbb{C}} = (x_1 + ix_2 | T^{*\mathbb{C}}(y_1 + iy_2))$

Stąd $\boxed{T^{\mathbb{C}*} = T^{*\mathbb{C}}}$

Dowód twierdzenia spektralnego dla X nad $\mathbb{R}$.

Niech $T \in L(X)$, $T^* = T$. Wówczas $T^{\mathbb{C}} \in L(X^{\mathbb{C}})$

Z powyższego lematu $T^{\mathbb{C}*} = T^{\mathbb{C}}$.

Niech $\operatorname{sp} T^{\mathbb{C}} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $V_{\lambda_i} = \ker(T^{\mathbb{C}} - \lambda_i 1_{X^{\mathbb{C}}})$

Wiemy, że $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ $i \neq j$. $\bigoplus V_{\lambda_i} = X^{\mathbb{C}}$

Zauważmy, że $\overline{V_{\lambda_i}} = \overline{\ker(T^{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathbb{1})} = \ker(\overline{T^{\mathbb{C}}} - \lambda_i \mathbb{1}) = \ker(T^{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathbb{1})$

} Tw. spektralne dla $\mathbb{C}$

Niech $Z_{\lambda_i} \subseteq X$ t., że $Z_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} = V_{\lambda_i}$

Zauważmy, że $Z_{\lambda_i} = \{x \in X : \overset{T^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}}(x+i0) = T(x)}{T^{\mathbb{C}} x} = \lambda_i x\} \subseteq X$.

Stąd Z_{λ_i} jest p-nią wł. op T oraz $Z_{\lambda_i} \subseteq V_{\lambda_i}$

Ponadto $Z_{\lambda_i} \perp Z_{\lambda_j}$ $i \neq j$ (bo $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$) oraz

$$n_i = \dim Z_{\lambda_i} = \dim Z_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} = \dim V_{\lambda_i}$$

Stąd $\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \dim X^{\mathbb{C}} = \dim X$

Czyli $\bigoplus_{i=1}^{k} Z_{\lambda_i} = X$. Wybierając bazy o.n. podprzestrzeni Z_{λ_i} dostajemy bazę $\mathcal{F}$ p-ni X, o.n., złożoną z wekt. wł. T.

Algebra z geometrią 22.05.2012

$(X,(\cdot|\cdot))$ - p-ń Euklidesowa

Miara układu wektorów $\{x_1,\ldots,x_n\}$: $\mu_1(x_1)=\|x_1\|$

$\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=\underset{\text{podstawa}}{\underset{\uparrow}{\mu_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}}\,\times\,\underset{\text{wysokość}}{\underset{\uparrow}{d(x_n,(x_1\ldots x_n))}}$

Macierz –"– –"– $\longrightarrow G(x_1,\ldots,x_n)=[(x_i|x_j)]$

Stwierdzenie: $\mu_n^2(x_1,\ldots,x_n)=\det G(x_1,\ldots,x_n)$

<u>Wniosek 1</u>

$$d(y,\langle x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle)=\left[\frac{\det G(x_1,\ldots,x_{n-1},y)}{\det G(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Definicja: $(X,(\cdot|\cdot))$ - j. w., $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Prostopadłościanem rozpiętym przez $\{x_1,\ldots,x_n\}$ nazywamy podzbiór $P(x_1,\ldots,x_n)\subseteq X$ t., że

$$P(x_1,\ldots,x_n)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i : 0\leq\alpha_i\leq 1\right\}.$$

Pytanie: Czy można zdefiniować miarę $P(x_1,\ldots,x_n)$ biorąc $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)$? Musimy wykazać, że jeśli $P(x_1,\ldots,x_n)=P(y_1,\ldots,y_n)$ to $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=\mu_n(y_1,\ldots,y_n)$.

Fakt: Nierówność Hadamarda:

Jeśli $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}, & \ldots & ,\alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1}, & \ldots & ,\alpha_{nn}\end{bmatrix}$ to $(\det A)^2\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2\right)$

Dowód można przeprowadzić korzystając z metody ekstremów związanych

Stwierdzenie:

(1.5) $\sigma\in\mathrm{Perm}\{1,\ldots,n\}$ $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=\mu_n(x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)})$

(1) $\{x_1,\ldots,x_n\}$ - l. zależne to $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=0$

(2) $T\in L(X)$ to $\mu_n(Tx_1,\ldots,Tx_n)=|\det T|\,\mu_n(x_1,\ldots,x_n)$

(3) Jeśli $P(x_1,\ldots,x_n)\subseteq P(y_1,\ldots,y_n)$ to $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)\leq\mu_n(y_1,\ldots,y_n)$

w szczególności jeśli $=$ to $=$

Definicja: Miarą prostopadłościanu $P(x_1,\ldots,x_n)$ nazywamy skalar $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)$

Dowód stwierdzenia:

Ad (1.5) skoro $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=\det G(x_1,\ldots,x_n)$ oraz

przy permutacji układu $\{x_1,\ldots,x_n\}$ przy pomocy σ wiersze i kolumny macierzy Gramma ulegają odpowiedniej permutacji $\mu_n(x_1,\ldots,x_n)=\det G(x_1,\ldots,x_n)=$
$=\det G(x_{\sigma(1)},\ldots x_{\sigma(n)})$

Ad (1) Bez straty ogólności zakładamy, że $x_n \in \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$

Stąd $\mu_n(x_1, \dots, x_n) = \mu(x_1, \dots, x_{n-1})\, \underbrace{d(x_n, \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0$

Ad (2) Przypomnienie: Q - F-kwadratowa oraz $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - bazy X.

$$(*) \quad [Q]_{\mathcal{E}} = C^T [Q]_{\mathcal{E}'} C \qquad C \text{ - macierz przejścia między bazami}$$

Krok 1. jeśli $\{x_1, \dots, x_n\}$ są liniowo zależne to $\{Tx_1, \dots, Tx_n\}$ też oraz

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\mu_n(x_1, \dots, x_n)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \shortparallel \\ |\det T|\, \mu_n(Tx_1, \dots, Tx_n)}}{\mu_n(Tx_1, \dots, Tx_n)}$$

Krok 2. Przypuśćmy, że układ $\{x_1, \dots, x_n\}$ jest liniowo niezależny (Bez straty ogólności zakładamy, że $\{x_1, \dots, x_n\}$ bazą X). Dowodzi się w sposób identyczny jak (*) że $G(Tx_1, \dots, Tx_n) = C^T G(x_1, \dots, x_n) C$ gdzie C macierz operatora T w bazie $\{x_1, \dots, x_n\}$. Stąd $\mu_n(Tx_1, \dots, Tx_n) = |\det C| \cdot \mu_n(x_1, \dots, x_n) =$
$= |\det T|\, \mu(x_1, \dots, x_n)$

Ad (3) Niech $P(x_1, \dots, x_n) \subseteq P(y_1, \dots, y_n)$.

Załóżmy, że $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo niezależny (w przeciwnym wypadku (3) sprowadza się do $0 \leqslant 0_{\mu}$).

Wówczas: $x_i \in P(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow x_i = \sum \alpha_{ij} y_j \quad 0 \leqslant \alpha_{ij} \leqslant 1$

Ponadto ponieważ $x_1 + \dots + x_n \in P(x_1, \dots, x_n) \subseteq P(y_1, \dots, y_n)$ to $\sum_j (\sum_i \alpha_{ij}) y_j \in P(y_1, \dots, y_n)$.

Wniosek: $\forall_{j \in \{1, \dots, n\}} \; 0 \leqslant \sum_i \alpha_{ij} \leqslant 1 \underset{0 \leqslant \alpha_{ij} \leqslant 1}{\Longrightarrow} \forall_j \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij}^2) \leqslant 1$

Korzystając z nierówności Hadamarda $\det[\alpha_{ij}]^2 \leqslant \prod \sum \alpha_{ij}^2 \leqslant 1$

Korzystając z pkt (2) stwierdzenia widzimy, że $\mu_n(x_1, \dots, x_n) = \mu_n(\sum_j \alpha_{1j} y_j, \dots, \sum_j \alpha_{nj} y_j)$
$= |\det[\alpha_{ij}]|\, \mu_n(y_1, \dots, y_n) \leqslant \mu_n(y_1, \dots, y_n)$

Algebra z geometrią 22.05.2012

Kwadryki

$(X, (\cdot|\cdot))$ – p-ń Euklidesowa

Definicja: Mówimy, że funkcja $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją kwadratową jeśli $\exists f_0, f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ t., że f_2 jest formą kwadratową, f_1 jest funkcjonałem liniowym oraz f_0 jest funkcją stałą i $f(x) = f_2(x) + f_1(x) + f_0 \quad \forall_{x} \in X$

Definicja: Mówimy, że podzbiór $M \subseteq X$ jest kwadryką jeśli $\exists$ funkcja kwadratowa f t., że $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Przykład $X = \mathbb{R}^3$ $\quad M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ $\quad f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$M_2 = \{x \in X : z = x^2 + y^2 + 1\}$ $\quad f_2(x,y,z) = x^2+y^2-z+1$

Definicja: Niech $S : X \to X$ (S – niekoniecznie liniowe)
Mówimy, że S jest ruchem sztywnym, jeśli jest złożeniem przesunięć i ~~odwzorowań ortogonalnych~~ liniowych izometrii.

Definicja: Niech M_1, M_2 będą kwadrykami. Mówimy, że M_1 jest równoważne M_2 jeśli $\exists$ ruch sztywny $S : X \to X$ t., że $M_1 = S(M_2) = \{y \in X : y = S(x) \text{ gdzie } x \in M_2\}$

Klasyfikacja kwadryk ze wzg. na powyższą równoważność

Niech $M \subseteq X$ będzie kwadryką, oraz f – funkcja kwadratowa, t., że $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

$f(x) = f_2(x) + f_1(x) + f_0$.

↖ forma kwadratowa, $\exists$ baza o.n. $\mathcal{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$ w której f_2 ma macierz diagonalną. Wówczas jeśli $\mathcal{E}' = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ jest bazą dualną to $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t., że $f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i^2(x)$.

Bez straty ogólności zakładamy że $\lambda_i \neq 0$ $i \in \{1, \dots, k\}$ oraz $\lambda_j = 0$ dla $j \in \{k+1, \dots, n\}$

Ponieważ $\mathcal{E}'$ jest bazą X' to $\exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ $f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \Phi_i w_i$

Wówczas $\forall x \in X$ mamy $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi_i^2(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i \Phi_i(x) + f_0$

Uzupełniając do pełnego kwadratu mamy:

$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\Phi_i(x) + \frac{b_i}{2\lambda_i}\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i \Phi_i(x) + \tilde{f}_0$ gdzie

$\tilde{f}_0 = f_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^2}{4\lambda_i}$. Biorąc $y \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ t., że $\Phi_i(y) = \frac{b_i}{2\lambda_i}$,

$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{2\lambda_i} x_i$ dostajemy $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi_i^2(x+y) + \sum_{i=k+1}^{n} b_i \Phi_i(x) + \tilde{f}_0$

$\exists$ baza $\mathcal{F} = \{y_1, \dots, y_n\}$ – o.n. t. że $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Psi_i^2(x+y) + \mu \Psi_{k+1}(x) + \tilde{f}_0$

$\mathcal{F}' = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$.

W

29.05.2012

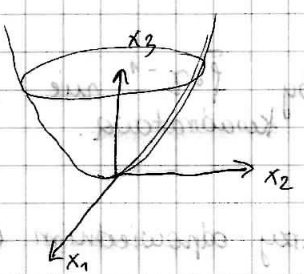
$(X, (\cdot|\cdot))$ – rzeczywista z il. skal.

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{forma} \\ \text{kwadratowa}}}{f_2(x)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{funkcjonał} \\ \text{liniowy}}}{f_1(x)} + f_0 \in \mathbb{R}$

$M = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) = 0\}$

Przykłady w $\mathbb{R}^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{3} - x_3$



$M \sim M' \iff \exists\ F$ – ruch sztywny t. że $F(M) = M'$

Klasyfikacja kwadryk

Niech $M = f^{-1}(\{0\})$, F – ruch sztywny

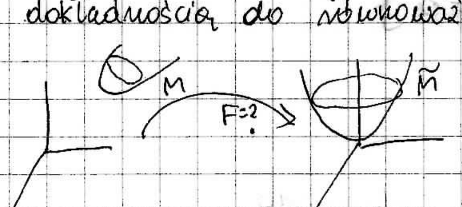
$\tilde{M} = F(M)$. Pytanie: jak wygląda $\tilde{f} : \tilde{M} = \tilde{f}^{-1}(\{0\})$

$x \in \tilde{M} \iff F^{-1}(x) \in M \iff f(F^{-1}(x)) = 0 \iff f \circ F^{-1}(x) = 0$

Stąd, jeśli $\tilde{f}(x) \equiv f \circ F^{-1}(x)$ to $\tilde{M} = \tilde{f}^{-1}(\{0\})$.

Idea: znaleźć możliwie najprostszą funkcję reprezentującą daną kwadrykę z dokładnością do równoważności.

np.



Na zeszłym wykładzie pokazaliśmy, że dla kwadryki M zadanej funkcją $f(x)$ $\exists$ jej równoważna kwadryka t. że jeśli $\mathcal{F}$ - baza ortonormal

$\mathcal{F} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ oraz $\mathcal{F}' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ - baza dualna to

$\tilde{M} = \tilde{f}^{-1}\{0\}$ gdzie $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i^2(x) + \mu \phi_{k+1}(x) + C$ dla

pewnego $\underset{\underset{\mathbb{N}}{\cap}}{k} \leq n$ $\quad C, \mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Dalej mamy następujące możliwości

(1) $\mu=0$ $\tilde{M}=\{x: \sum_i^k \lambda_i \phi_i^2(x)+c=0\}$

(1.1) $c\neq 0$ $\tilde{M}=\{x: \sum_{i=1}^k -\frac{\lambda_i}{c}\phi_i^2(x)=1\}$

(1.2) $c=0$ $\tilde{M}=\{x: \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i^2(x)=0\}$

(2) ~~$\mu\neq 0$~~ Wykonując odpowiednie przesunięcie absorbujemy c do ϕ_{k+1} tzn:

Niech: $\tau(x)=x+x_0$ $\tau^{-1}(x)=x-x_0$

Szukamy takiego x_0 żeby $\tilde{f}\circ\tau^{-1}$ nie miało części stałej ale miało taką samą część kwadratową.

dla $x_0=\text{const.}\, e_{k+1}$, to przy odpowiednim dobrane const. absorbujemy stałą c do ϕ_{k+1}:

$$\tilde{f}\cdot\tau^{-1}(x)=\sum_{i=1}^k \lambda_i\phi_i^2(x-\text{const.}\,e_{k+1})+\mu\phi_{k+1}(x-\text{const.}\,e_{k+1})+c$$

$$\mu\phi_{k+1}(x)\boxed{-\mu\,\text{const.}+c}=0$$

Biorąc $\text{const.}=\frac{c}{\mu}$ mamy $\tilde{f}\circ\tau^{-1}$ - nie ma składn. stałego

$$\tilde{M}=\{x: \sum\lambda_i\phi_i^2(x)+\mu\phi_{k+1}(x)=0\}$$

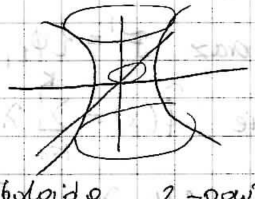
Dzieląc przez μ mamy:

$$\tilde{M}=\{x: \sum_1^k\frac{\lambda_i}{\mu}\cdot\phi_i^2(x)+\phi_{k+1}(x)=0\}$$

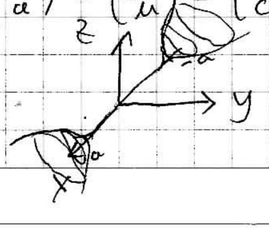
Przykłady dla $\mathbb{R}^3$:

typ 1: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ elipsoida

typ 2: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ hiperboloida 1-powłokowa



typ 3 $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ hiperboloida 2-powłokowa



$\left\{\begin{array}{l} a, b, c \\ \varepsilon=\rho \end{array}\right. \rightsquigarrow \eta$

typ 4 $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=0$ stożek eliptyczny

$+ + +$ punkt

1-4 ⇒ przypadki $\mu=0$

typ5 $\mu\neq 0$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+z=0$ paraboloida eliptyczna.

Dalej: możliwe są pewne degeneracje

typ 6 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ walec eliptyczny

typ 7 $x^2=0$ płaszczyzna yz

Wniosek: kwadryki w $\mathbb{R}^3$: płaszczyzny, proste, stożki, elipsoidy, hiperboloidy, paraboloidy

inne: ⤷ + obrót + przesunięcie

Formy objętości $(X, (\cdot|\cdot))$ - p-ń Euklidesowa

motywacja pochodzi od miany układu wektorów.

$$\mu_n(v_1,\dots,v_n)=\det G(v_1,\dots,v_n)^{\frac{1}{2}}=\det[(v_i|v_j)]^{\frac{1}{2}}$$

Z drugiej strony: $T: X\to X$ liniowy

$$\mu_n(Tv_1,\dots,Tv_n)=|\det T|\cdot\mu(v_1,\dots,v_n) \quad (●)$$

Niech $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ - baza o.n. p-ni X. Rozważmy operator $Te_i=v_i$.

Wówczas z (●) mamy $\mu_n(v_1,\dots,v_n)=\mu_n(Te_1,\dots,Te_n)=|\det T|\mu_n(e_1,\dots$

$\overset{\parallel}{\det T}$

ponieważ: $\mu_n(e_1,\dots,e_n)=\det[(e_i|e_j)]^{\frac{1}{2}}=\det(\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}=1$

Uwaga:

$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$ to $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [v_{ij}]$

stąd $\mu_n(v_1,\dots,v_n) = |\det[v_{ij}]|$ $\quad [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$

Def.: Niech X - rzeczywista prz wektorowa.

Zorientowaną formą objętości na X nazywamy funkcję

$$\omega : \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\ \text{razy}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{t, że}$$

(i) $\omega \neq 0$ tzn. $\exists\, x_1,\dots,x_n \in X : \omega(x_1,\dots,x_n) \neq 0$

(ii) ω jest liniowa w każdym argumencie

(iii) ω - antysymetryczna: $\omega(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots) = (-1)\,\omega(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$

np.:

$(X,(\cdot|\cdot))$ - prz Euklidesowa

$\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ - baza o.n.

$\omega(v_1,\dots,v_n) = \det([v_{ij}])$ $\quad v_i = \sum v_{ij} e_j$

Definicja:

Niech ω będzie formą objętości na X oraz $\mathcal{F} = \{f_1,\dots,f_n\}$ - baza. Mówimy, że baza $\mathcal{F}$ jest dodatnio zorientowana ze względu na ω jeżeli $\omega(f_1,\dots,f_n) > 0$.

$\mathcal{F}$ - ujemnie zorientowana jeśli $\omega(f_1,\dots,f_n) < 0$.

Uwaga: Powyższe wyczerpuje wszystkie przypadki bo

$\omega(f_1,\dots,f_n) = 0 \Rightarrow \omega = 0$,

bo $\omega(\underbrace{\sum v_{1i_1} f_{i_1}}_{v_1},\dots,\underbrace{\sum v_{ni_n} f_{i_n}}_{v_n}) =$

$= \det([v_{ij}])\,\omega(f_1,\dots,f_n)$ (wieloliniowość!)

Iloczyn wektorowy (il. skalarny + zorientowana forma obj.)

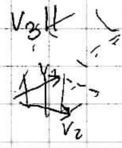
Motywacja: $X = \mathbb{R}^3$ ze stand. il skalarnym

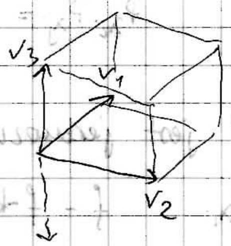
$v_1 \times v_2$ - iloczyn wektorowy

WŁASNOŚCI

(1) $v_3 \perp \langle v_1, v_2 \rangle$

(2) ~~$\|v_3\|$~~ $\|v_3\| = \mu_2(v_1, v_2)$





DEFINICJA

Niech $(X, (\cdot|\cdot), \omega)$ - p-ń z iloczynem skalarnym i zorientowaną formą objętości.

$\dim X = n$ oraz $v_1, \dots, v_{n-1} \in X$

Mówimy, że v jest iloczynem wektorowym $v_1, \dots, v_{n-1}$

$v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ jeśli $\forall w \in X$ mamy

$\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, w) = (v|w)$

STWIERDZENIE

$(X, (\cdot|\cdot), \omega)$ $v_1, \dots, v_{n-1}$ - j.w. Wówczas v istnieje i jest jednoznacznie wyznaczone.

dowód:

$X \ni w \longmapsto \omega(v_1, \dots, v_{n-1}, w) \in \mathbb{R}$

z lematu Riesza: $\exists!\, v \in X$ t, że $\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, w) = (v|w)$.

Kładziemy $v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$

WŁASNOŚCI

(1) $v_1 \times \dots \times v_i \times \dots \times v_j \times \dots \times v_{n-1} = - v_1 \times \dots \times v_j \times \dots \times v_i \times \dots \times v_{n-1}$

(2) $(v_1, \dots, v_{n-1}) \longmapsto v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ liniowe w każdym argumencie

(3) $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \perp \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ bo $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ $(v_1 \times \dots \times v_{n-1} | v_i) =$

$= \omega(v_1, \dots \underset{\uparrow}{v_i} \dots v_{n-1}, \underset{\uparrow}{v_i}) = 0$

①

(c) $\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\| = \mu_n(v_1, \ldots, v_{n-1})$ nie zawsze prawdziwe!

5.06.2012

W.

Tw. Spektralne nad $\mathbb{C}$, T - normalny na $(X, (\cdot|\cdot))$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - w. własne $P_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$ - rzuty na p-nie własne (rzuty spektralne)

to $T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot P_{\lambda_i}$ $P_{\lambda_i} \cdot P_{\lambda_j} = \delta_{ij} P_{\lambda_j}$ $P_{\lambda_i}^{*} = P_{\lambda_i}$

powyższy rozkład jest jednoznaczny

$f(T) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$ f - f-kcja nad $\mathbb{C}$

Jeśli $\mathcal{E}_i$ - baza o.n. p-ni wł. $X_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})$ to

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_K$ - baza o.n. p-ni X t, że $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest macierzą diag.

Twierdzenie

$(X, (\cdot|\cdot))$ - nad $\mathbb{C}$, $T_1, T_2 \in L(X)$ - operatory normalne oraz $T_1 T_2 = T_2 T_1$

Wówczas $\exists$ baza o.n. $\mathcal{E}$ - p-ni X t, że macierze $[T_1]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$, $[T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

są diagonalne

(Istnieje baza o.n. p-ni X wektorów wł. T_1 i T_2)

dla pewnego $i \in \{1, \ldots k\}$

Lemat 1. T - normalny, P_{λ_i} - r.w. Wówczas $\exists$ wielomian

$w(x)$ t, że $P_{\lambda_i} = w(T)$.

Dowód:

$w_i(T) = \sum_{j=1}^{k} w(\lambda_j) P_{\lambda_j}$. Widzimy że każdy

wielomian t, że $w_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ jest dobry

$\exists$ wielomian st. k który spełnia te warunki, więc taki bierzemy.

Lemat 2

T_1, T_2 jak w twierdzeniu, f - funkcja analityczna

Wówczas $f(T_1) \cdot T_2 = T_2 \cdot f(T_1)$

Wniosek: jeśli T_1, T_2 - komutują to rzuty spektralne T_1 komutują z T_2.

dowód: $\forall n$ $T_1^n T_2 = T_2 T_1^n$ stąd $\forall$ wielomianu $w(x)$ mamy

$w(T_1) T_2 = T_2 w(T_1)$. Biorąc przejście graniczne $f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum a_i z^i$

dostajemy też

- pytanie o def.
- pytanie o dowód (tw. Spek

Lemat 3. $T \in L(X)$ - normalny, $Y \subseteq X$ - podp-ń Y t, że $TY \subseteq Y$ oraz $TY^\perp \subseteq Y^\perp$. Wówczas $T|_Y$ jest normalny oraz $(T|_Y)^* = T^*|_Y$

dowód: Czy $T^*Y \subseteq Y$. Weźmy $x \in Y^\perp$, $y \in Y$. Zauważmy, że

$$(x|T^*y) = (Tx|y) = 0 \Rightarrow T^*y \in (Y^\perp)^\perp = Y$$

Dalej $\forall y_1, y_2 \in Y$ $(y_2|(T|_Y)^* y_1) = (T|_Y y_2|y_1) = (Ty_2|y_1) =$

$= (y_2|T^* y_1) = (y_2|T^*|_Y y_1)$

stąd $T|_Y^* = T^*|_Y$

Normalność $T|_Y$: $T|_Y \cdot T|_Y^* = T|_Y \cdot T^*|_Y = TT^*|_Y = T^*T|_Y = T^*|_Y T|_Y$

Dowód twierdzenia

Niech $P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_k}$ - miary sp. op. T_1. Skoro $T_1T_2 = T_2T_1$ to z lematu 2 mamy $P_{\lambda_i}T_2 = T_2P_{\lambda_i}$. Stąd $T_2X_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$, gdzie X_{λ_i} - p-ń wł. dla λ_i.

↑ p-ń niezmiennicza

jeśli $x \in X_{\lambda_i}$, to $P_{\lambda_i}x = x$

oraz $P_{\lambda_i}T_2x = T_2P_{\lambda_i}x = T_2x$

czyli $T_2x \in X_{\lambda_i}$

Podobnie $(1-P_{\lambda_i})T_2 = T_2(1-P_{\lambda_i}) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2X_{\lambda_i}^\perp \subseteq X_{\lambda_i}^\perp$

Lemat 3 $\Rightarrow$ $T_2|_{X_{\lambda_i}}$ - jest op. normalnym na X_{λ_i}

~~Biorąc~~ Wybierając B_{λ_i} - bazę o.n. p-ni X_{λ_i} - złożoną z wektorów własnych op. $T_2|_{X_{\lambda_i}}$ otrzymujemy bazę $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ o.n. p-ni $X = \bigoplus_{i=1}^{k} X_{\lambda_i}$ oraz każdy wektor bazy B jest wektorem własnym zarówno T_1 jak i T_2.

$Y \subseteq X$ $T \in L(X)$ $\forall y \in Y$ $Ty \in Y$

$T|_Y \in L(Y)$ $T|_Y y = Ty \in Y$

Rozkład biegunowy operatorów

Motywacja: $z \in \mathbb{C} : re^{i\phi}$ $\quad r = \underset{\underset{|z|}{\shortparallel}}{\sqrt{\bar{z}z}} \quad = \quad e^{i\phi} = \frac{z}{|z|}$

Twierdzenie

Niech $(X, (\cdot|\cdot))$ - zespolona z iloczynem skalarnym oraz $T \in L(X)$ ($\boxed{\text{nie}}$ zakładamy że T-normalny)

Wówczas $\exists$ operator unitarny $\mathcal{U} \in L(X)$ oraz operator dodatni $R \in L(X)$

t, że $T = \mathcal{U} \cdot R$.

Jeśli T - odwracalny to $\mathcal{U}$ i R są jednoznacznie wyznaczone
(istnieje 1 para takich op.)

Jeśli T - nieodwracalny to R - jednoznacznie wyznaczone

Def: R nazywamy modułem T i ozn $|T|$

Jeśli T - odwracalny to $\mathcal{U}$ nazywamy fazą T.

Operator $R \in L(X)$ - dodatni jeśli $\forall x \in X$ mamy $(x|Rx) > 0$

- **Fakt:** R - dodatni $\Leftrightarrow$ R samosprzężony i wart. własne R są dodatnie

dowód: $\boxed{\Rightarrow}$ • skoro $(x|Rx) \geqslant 0$ to $(x|Rx) = (R^*x|x) = \overline{(x|\underset{\underset{R}{\Uparrow}}{R^*}x)} = (x|R^*x$ $\Longrightarrow$

z tożsamości polaryzacyjnej $\Rightarrow \underset{x,y \in X}{\forall}$ $(x|Ry) = (x|R^*y)$
$\Downarrow$
$R^* = R$

Czyli: R - samosprzężony

• λ - wart. wł. R
$x \in X$ wektor wł. o wartości wł. λ

$$0 \leq (x|Rx) = (x|\lambda x) = \lambda(x|x) \Rightarrow \lambda \geqslant 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $R^* = R$; $\lambda_i \geqslant 0$ to $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}$ rozkład spektralny

$$\forall x \in X \quad (x|Rx) = \left(x \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i} x\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x|P_{\lambda_i} x) =$$

$$= \sum \lambda_i (x|P_{\lambda_i} \cdot P_{\lambda_i} x) = \sum \underset{\underset{0}{\vee\!\shortparallel}}{\lambda_i} \underset{\underset{0}{\vee\!\shortparallel}}{(P_{\lambda_i} x|P_{\lambda_i} x)} \geqslant 0$$

R - dodatni

- **Stwierdzenie**

Niech $R \in L(X)$ będzie dodatni. Wówczas $\exists!\ S \in L(X)$ dodatni t, że $S^2 = R$

def: S j.w. ozn.: $R^{\frac{1}{2}}$

dowód: Jeśli $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}$. S def. jako: $S = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} P_{\lambda_i}$ $S^2 = R$ (mamy

(a teraz, że $\exists!$)

jeśli $\tilde{S}$ - dodatni oraz $\tilde{S}^2 = R$ to biorąc rozkład spektralny $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{~~k~~ l} \mu_j \tilde{R}_{\mu_j}$ dostajemy $\tilde{S}^2 = \sum_{j=1}^{l} \mu_j^2 P_{\mu_j} = R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}$

Z jednoznaczności rozkładu spektralnego operatora R mamy

$l = k$, $\tilde{P}_{\mu_i} = P_{\lambda_i}$, $\lambda_i = \mu_i^2$ $\Rightarrow$ $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\frac{1}{2}} P_{\lambda_i} = S$ $\boxed{\tilde{S} = S}$

dowód tw. o rozkładzie biegunowym

ednozna-nosc R

- Przypuśćmy, że $T = U \cdot R$. Wtedy $T^*T = (UR)^* UR = R U^* U R$

Ponieważ T^*T dodatni $\}$ $(x | T^*Tx) = (Tx | Tx) > 0$ to z powyższych lematów $R = (T^*T)^{1/2}$

- $\exists R, U$ - R def. j.w. tzn. $R = (T^*T)^{1/2}$

Definicja U:

Krok 1: $URx \overset{def}{=} Tx$. Na obrazie R, U działa w ten sposób

U - dobrze zdefiniowane $\|URx\| = \|Rx\|$

(U - nie zmienia długości wektora)

samospr

$\|URx\|^2 = \|Tx\|^2 = (Tx | Tx) = (x | T^*Tx) = (x | R^2x) = (x | \underset{\uparrow}{\textcircled{R}} Rx)$

$= (Rx | Rx) = \|Rx\|^2$

W tym momencie mamy operator który działa z $RX \subseteq X$ do $TX \subseteq X$.

Krok 2. Rozszerzamy U do całej prz. X nie psując jego unitarności

Obserwacja: $\ker R = \ker T$ bo $x \in \ker R \Leftrightarrow \|Rx\|^2 = (Rx | Rx) = (x | R^2x) =$

$(**)$ $\overset{\|}{0}$ $\} = (x | T^*Tx) = (Tx | Tx) = \|Tx\|^2$

Obserwacja:

$\dim(\operatorname{Ran} T)^{\perp} = \dim X - \dim \operatorname{Ran} T = \dim\ker T = \dim \ker R$

Zauważając, że $\underbrace{\ker R \perp \operatorname{Ran} T}_{\text{dw.}}$ oraz $\operatorname{Ran} T \oplus \ker T = X$

rozszerzamy U w taki sposób, że $U(\ker R) = (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$

oraz $\forall\, x \in \ker R \quad \|Ux\| = \|x\|$

Tak rozszerzone U daje równość $UR = T$ oraz U-unitarny.

- T-odwracalny ($\Rightarrow U$ - jednozn. wyzn.)

$\Downarrow$

(**) $\ker R = \ker T = \{0\}$ więc R-odwracalny stąd $U = TR^{-1}$ - jednozn. wyzn.