Tematy WZM:

04.10.'14r.

→ teoria odwzorowań liniowych
→ teoria przestrzeni z iloczynem skalarnym
→ elementy teorii prawdopodobieństwa
→ analiza zespolona

Przykład 1:

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – dostępne stany.

w chwili $t=0$ niech gen będzie w stanie s_1.
Niech β oznacza prawdopodobieństwo mutacji tego genu do stanu s_k, gdzie $k \neq 1$.
Prawdopodobieństwo braku mutacji:
wynosi $1-(m-1)\beta$

Problem: znaleźć odpowiedzi na następujące pytania:
(i.) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili 0 #100 gen będzie w stanie s_1.
(ii.) — " — " — gen będzie w stanie s_5.
Zakładamy symetrię ze względu na stany s_i oraz ze względu na przesunięcie w czasie (β nie zależy od czasu)

Definicja 1.

Łańcuchem Markowa nazywamy parę (S,P), gdzie $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ jest zbiorem skończonym oraz P jest macierzą $m \times m$. (p_{ij} – elementy macierzy)

$P = [p_{ij}]_{i,j=1}^{m}$, tak że $\forall i,j \in \{1, .., m\}: p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1$

wiersze #kolumny

Uwaga: Macierz P spełniająca powyższe warunki nazywamy macierzą stochastyczną

Macierz stochastyczna dla Przykładu 1 z $n=4$

$$P = \begin{bmatrix} 1-3p & p & p & p \\ p & 1-3p & p & p \\ p & p & 1-3p & p \\ p & p & p & 1-3p \end{bmatrix} M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Niech (S, P) będzie łańcuchem Markowa.

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$ – wektor stanu w chwili 0.

λ_i – prawdopodobieństwo, że łańcuch w chwili 0 jest w stanie s_i.

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \vdots \\ \varrho_n \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varrho_1 = p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + \ldots + p_{1n}\lambda_n \\ \varrho_2 = p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + \ldots + p_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ \varrho_n = p_{n1}\lambda_1 + p_{n2}\lambda_2 + \ldots + p_{nn}\lambda_n \end{cases}$$

rachunek macierzowy $\rightarrow \Lambda_1 = P \cdot \Lambda_0$ mnożenie wektora Λ_0 przez macierz

Λ_n – stan w chwili n n-ta potęga macierzy P

$$\Lambda_n = P \cdot \Lambda_{n-1} = \ldots = P \ldots P \cdot \Lambda_1 = P^n \Lambda_0$$

Problem: Jak liczyć wysokie potęgi macierzy.

Definicja 2:

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ albo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

l. rzeczywiste   l. zespolone

Przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy czwórkę $(X, +, 0, \cdot)$, (gdzie) taką, że X jest zbiorem

$+: X \times X \longrightarrow X$ notacja $x_1 + x_2$

$\cdot: \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ notacja $\underset{\in \mathbb{F}}{\alpha} \cdot x^{\in X}$

$0 \in X$

oraz spełnione są następujące warunki:

$\forall x,y,z \in X \ (x+y)+z = x+(y+z)$

$\forall x,y \in X \ x+y = y+x$

$\forall x \ \ x+0 = x$

$\forall x \ \exists y : x+y=0$

$\forall \alpha \in \mathbb{F} \ \forall x,y \in X \ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F} \ \forall x \in X \ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha x + \beta y$

$\forall x \in X \ \ 1x = x$

Elementy X nazywamy wektorami, a elementy $\mathbb{F}$ – skalarami.

Przykłady:

1. $X = \mathbb{R}^n \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, x+y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}, \alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$

2. X – wielomiany zespolone stopnia nie większego od n

$X \stackrel{ozn}{=} \mathbb{C}_n[\cdot] \quad w(z) = b_n(z-1)^n + b_{n-1}(z-1)^{n-1} + \ldots + b_0$

$w \in X \quad w(z) \stackrel{"}{=} a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

$\mathbb{C}^n \ni \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \leftarrow w \in X \ni w \mapsto \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+1}$

Definicja 3:

Bazą przestrzeni nazywamy uporządkowany zbiór wektorów $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_l\}$ takich, że $\forall x \in X \ \exists$ jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{F}$, tak że $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_l e_l$.

Przykłady: $X = \mathbb{C}_n[\cdot] \quad \mathcal{E} = \{1, z, z^2, \ldots, z^n\}$

$\mathcal{F} = \{1, (z-1), (z-1)^2, \ldots, (z-1)^n\}$

wymiar $X \stackrel{ozn}{=} \dim X = n+1$

Ogólnie wymiar definiujemy jako liczbę elementów bazy (dowolnej)

$\boxed{\dim X = l}$

Definicja 4:

Niech X, Y będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{F}$.
Odwzorowanie $T: X \to Y$ nazywamy liniowym jeśli
$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad \forall_{\alpha_1, \alpha_2}$:

$$(*) \quad T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2).$$

Przykłady:

a) $T_1, T_2 : \mathbb{C}_n[\cdot] \to \mathbb{C}^{n+1}$.

b) $X, \mathcal{E}$ - baza X, $X \ni x \mapsto [x]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{F}^n$

gdzie $\dim X = n$ oraz $[x]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

tak, że $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

c) $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \quad a_{ij} \in \mathbb{F}$

liniowe $\to A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = Ax$

gdy $y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$

Macierze odwzorowań liniowych:

Niech $T: X \to Y$ - liniowe $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - baza X
oraz $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ - baza Y.
Macierzą odwzorowania T w bazach $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ nazywamy macierz $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [a_{ij}]$.

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Przykłady:

X - wielomiany rzeczywiste stopnia nie większego od 4.

$X = \mathbb{R}_4[\cdot]$, $Y = \mathbb{R}_3[\cdot] \quad X \ni w \mapsto T(w) = \frac{d}{dx} w$.

$\mathcal{E} = (x^4, x^3, x^2, x, 1) \quad \mathcal{F} = (1, x, x^2, x^3)$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

Ogólna uwaga.

$T: X \to Y$, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ - bazy $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [a_{ij}]$

ustalmy wektor $x \in X$; $[x]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

współrzędne wektora x w bazie $\mathcal{E}$.

Niech $[Ty]^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

Wówczas:

wektor, macierz: a_{ij}, wektor

$$\underset{i=1,\dots,m}{\forall}\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Składanie odwzorowań liniowych, a mnożenie macierzy.

Definicja 5:

X, Y, Z - przestrzenie nad $\mathbb{F}$

$T: X \to Y$, $S: Y \to Z$. - liniowe

Złożenie $S \cdot T: X \to Z$ definiuje się wzorem:

$$S \cdot T(x) = S(T(x))$$

$T \cdot S$ jest odwzorowaniem liniowym.

Stwierdzenie:

X, Y, Z; T, S - jak wyżej

$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ - bazy X, Y, Z odpowiednio

$$[S \cdot T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = [S]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \cdot [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$$

składanie odwzorowań liniowych — mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy: $A \in M_{k,l}(\mathbb{F})$, $B \in M_{l,m}(\mathbb{F})$, to iloczyn $C = A \cdot B \in M_{k,m}(\mathbb{F})$, gdzie $c_{ij} = \sum_{n=1}^{l} a_{in} b_{nj}$

Definicja 6:

$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ bazy przestrzeni X.

Macierz $[id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}$ nazywamy macierzą przejścia z bazy $\mathcal{E}_1$ do bazy $\mathcal{E}_2$.

Przykład:

$X = \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{E}_1 = \left(\overset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)$$

$$\mathcal{E}_2 = \left(\underset{f_1 = ie_1 + 3e_2}{\begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix}}, \underset{f_2 = 3e_1 + ie_2}{\begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix}} \right)$$

identyczność - operacja zmiany robiąca tak, że wektor x z wektorem x. $id(x) = x$

$$[id]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} i & 3 \\ 3 & i \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix}$$

$$1 = i\alpha + 3\beta \Rightarrow i\alpha + 9i\alpha = 10i\alpha$$
$$0 = 3\alpha + i\beta \Rightarrow \beta = 3\alpha i$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = \frac{1}{10i} = -\frac{i}{10}$$
$$\beta = \frac{3}{10}$$

$$[id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{i}{10} \end{bmatrix}$$

Mnożymy macierze przejścia:

$$[id]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_1} [id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} i & 3 \\ 3 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{i}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ - dwuwymiarowa macierz jednostkowa

$$\parallel$$
$$[id \cdot id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_1}$$
$$\parallel$$
$$[id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_1}$$

Definicja 7:

Macierz postaci $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n$ nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy $\mathbb{1}_n$.

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. Mówimy, że A jest macierzą odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ taka, że $A \cdot B = BA = \mathbb{1}_n$; B oznaczamy A^{-1}

Uwaga: $[id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}$ jest macierzą odwracalną oraz

$$\left([id]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}\right)^{-1} = [id]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_1}$$

Niech $T: X \to Y$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ - bazy X, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ - bazy Y

$$[T]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{E}_2} = [id_Y \circ T \circ id_X]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{E}_2} = [id_X]^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{F}_1} \circ [id]^{\mathcal{E}_1}_{\mathcal{E}_2}$$

14.10.'14r.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} - \text{"duża"}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \ldots$$

Metodyka wyliczania A^n.

Co z: $1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Oznaczenie $\exp(A)$, e^A.

Wyznacznik macierzy.

Przykład: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Czy istnieje $B: AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? = Czy A jest macierzą odwracalną?

$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$ - macierz A jest odwracalna.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ogólnie: $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad - bc \neq 0$

wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Definicja 1. Niech $n \in \mathbb{N}$, wyznacznikiem nazywamy funkcję $\det: \underbrace{\mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n}_{n-\text{razy}} \to \mathbb{F}$ daną wzorem:

$$\mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n \ni \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right) \longmapsto \sum_{\pi \in Perm(n)} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)n}$$

gdzie $sgn(\pi)$ jest znakiem permutacji π.

$$sgn(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{jeśli liczba transpozycji "porządkujących" } \pi \text{ jest parzysta} \\ -1 & \text{——— '' ——— nieparzysta} \end{cases}$$

Przykład:

$$\pi = (4\,3\,2\,1) \xrightarrow{3} (1\,4\,3\,2) \xrightarrow{2} (1\,2\,4\,3) \xrightarrow{1} (1\,2\,3\,4)$$

$$sgn(\pi) = +1$$

Własności wyznacznika det.

1.) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = 1$ UNORMOWANIE

LINIOWOŚĆ ZE WZGLĘDU NA KAŻDY Z ARGUMENTÓW

2.) $\vec{a_i}$ – i-ta kolumna: $\vec{a_i} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}^n$

i-ta kolumna

$$\det(\vec{a_1}, \ldots, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{a_{i+1}}, \ldots, \vec{a_n}) = \alpha \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{x}, \ldots, a_n) + \beta \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{y}, \ldots, a_n)$$

3.) $\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_i}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) = (-1) \det(\vec{a_1}, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

ANTYSYMETRIA

Stwierdzenie

Niech $f: \mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ będzie funkcją spełniającą 1, 2 i 3.
Wówczas $f = \det$

Szkic dowodu.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ – baza kanoniczna}$$

$$\vec{a}_1 = \sum_{i_1=1}^{m} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \vec{a}_m = \sum_{i_m} a_{i_m m} e_{i_m}$$

$$f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) = f\left(\sum_{i_1} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m} a_{i_m m} e_{i_m}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m m} \, f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) =$$

$$= \sum_{\pi \in Perm(n)} a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(m)m} \; f(e_{\pi(1)}; \dots; e_{\pi(m)}) = \sum_{\pi \in Perm(m)} a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(m)m} \, sgn(\pi) \underbrace{f(e_1, \dots, e_n)}_{1 \text{ " unormowane } f} =$$

$$= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m).$$

Twierdzenie: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]$ $B = [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m]$

Dowód: (Zał. że $\det(A) \neq 0$)

$f: (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) \longmapsto \det(A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_m) \in \mathbb{F}$, własności: 1.) ✓ 2.) ✓ 3.) ✓ } dla $\frac{1}{\det A} \cdot f$

$$f(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m) = \det(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_m) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\det A} f(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = \det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m) = \det(B) \\ &\qquad \parallel \\ &\frac{1}{\det A} \det(A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_m) = \frac{1}{\det A} \det(AB) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Fakt: $A = [a_{ij}] \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$

$B = [b_{ij}]$ $b_{ij} = a_{ji}$

$B = A^T$.

$\det(A) = \det(A^T)$.

Wniosek: „Przestawienie wierszy A generuje (-1)."

Rozwinięcie Laplace'a

Notacja j.w. Mamy $\det(\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)$ operacje kolumnowe nie zmieniają wyznacznika

Podobnie dla operacji wierszowych.

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_m) = \det\left(\vec{a}_1, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_m\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \det \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & & 0 & \dots & a_{jn} \\ & & 1 & & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ i\text{-ta kolumna} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j\text{-ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 \; 1 \; 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ i \end{array} \begin{array}{l} \\ j \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} (-1)^{i-1+j-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\phantom{A_{ij}}} \\ 0 & \end{bmatrix} \leftarrow \text{rozwinięcie Laplace'a} \cdot \det(A)$$

A_{ij}

to co zostaje z A po wykreśleniu j-tego wiersza i i-tej kolumny

Uwaga: Niech $k \neq i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \overbrace{(-1)^{i+j} \det [\,/\!/\,]}^{A^D_{ij} = b_{ij}} = \det(\vec{a}_1, \dots, \underset{i\text{-ta}}{\vec{a}_k}, \dots, \underset{k\text{-ta}}{\vec{a}_k}, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

wykreślenie j-ty wiersz i i-tą kolumnę.

Definicja 2.

Macierzą dopełnień A^D macierzy A nazywamy macierz $A^D = [b_{ij}]$, gdzie $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det [\,/\!/\,]$ ← j-ty wiersz i i-ta kolumna są wykreślone.

Podsumowując otrzymaliśmy następujący wzór:

$$A^D = [b_{ij}], \quad A = [a_{jk}]$$

$$A^D \cdot A = \det(A) \cdot 1_n = \begin{bmatrix} \det(A) & & & 0 \\ 0 & \det(A) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

Wniosek:

Jeśli $\det A \neq 0$ to A jest macierzą odwracalną oraz
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D.$$

Można pokazać, że A - odwr. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$L \Rightarrow P$ $\quad A$-odw. $\exists B: A \cdot B = 1 \quad \det(A)\det(B) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Wyznacznik endomorfizmu

X - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{F}$, $\dim X < \infty$

$T: X \to X$ - liniowy

Niech $\mathcal{E}$ - baza X, $\quad [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$

Definiujemy
$$\det(T) = \det\left([T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\right) \left\{ \begin{aligned} &= \det\left([T]^F_F\right) = \det\left([id]^F_{\mathcal{E}} [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} [id]^{\mathcal{E}}_F\right) = \\ &= \det([id]^F_{\mathcal{E}}) \det([id]^{\mathcal{E}}_F) \cdot \det([T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}) \end{aligned} \right.$$

Uwaga: Jeśli $T: X \to X$ to T odwracalny $\Leftrightarrow \det(T) \neq 0$

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\} \overset{\text{podprzestrzeń}}{\subset} X$$

$$\operatorname{ran} T = \{y \in X : \exists\, x \in X \text{ tak że } y = Tx\}.$$

Definicja 3: $T: X \to X$ - endomorfizm.

Wielomian charakterystyczny $W_T: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ definiujemy wzorem
$$\mathbb{F} \ni \lambda \longmapsto W_T(\lambda) = \det(T - \lambda 1_X)$$

Przykład: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad W_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

Definicja 4:

Niech $\lambda \in \mathbb{F}$, $T: X \to X$. Mówimy, że λ wartością własną T jeśli $\exists\, x \neq 0$.

$Tx = \lambda x$. Takie $x \in X$ nazywamy wektorem własnym T.

Stwierdzenie T, w_T – j.w.
Wówczas $\lambda \in \mathbb{F}$ jest wartością własną $T \Leftrightarrow w_T(\lambda)=0$

Dowód: λ taka że $w_T(\lambda)=0 \Leftrightarrow \det(T-\lambda\mathbb{1}) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ Operator $(T-\lambda\mathbb{1})$ jest nieodwracalny.

$\Leftrightarrow \exists x \neq 0 : (T-\lambda\mathbb{1}x)(x)=0 \Leftrightarrow Tx=\lambda x$ dla $x\neq 0$

Skorzystaliśmy z następującej równoważności:

$T: X \to X$ jest odwr $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

Definicja 5:

Zbiór wartości własnych T nazywamy spektrum T i oznaczamy symbolem $sp(T)$.

Definicja 6:

Niech $v(\lambda)$ będzie wielomianem

$v(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_n\lambda^n$ oraz $T: X\to X$

Definiujemy $v(T)$ wzorem: $v(T)=a_0\mathbb{1}+a_1T+a_2T^2+\ldots+a_nT^n$.

$v(T): X \to X$.

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

T, w_T – j.w. Wówczas $w_T(T)=0$

Dowód: Bez strat ogólności załóżmy, że T jest macierzą.
Innymi słowy, pracujemy z macierzą A operatora T w bazie $\mathcal{E}$.

$A^D A = \det(A)\mathbb{1}$ – stosujemy do $A-\lambda\mathbb{1}$

$(A-\lambda\mathbb{1})^D(A-\lambda\mathbb{1}) = \det(A-\lambda\mathbb{1})\mathbb{1} = w_T(\lambda)\cdot\mathbb{1}$

$\exists B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ takie że

$(*)\ (A-\lambda\mathbb{1})^D = B_0+\lambda B_1+\ldots+\lambda^{n-1}B_{n-1}$

Niech $w_T(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ (**)

(*), (**) $\Rightarrow$

$$(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1})(A - \lambda \mathbb{1}) = (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n)\mathbb{1}$$

Porównujemy wyrazy przy tych samych potęgach λ.

$$B_0 A = a_0 \mathbb{1}$$
$$B_1 A - B_0 \mathbb{1} = a_1 \mathbb{1} \quad | \cdot A$$
$$B_2 A - B_1 \mathbb{1} = a_2 \mathbb{1} \quad | A^2$$
$$\vdots$$
$$-B_{n-1} \cdot \mathbb{1} = a_n \mathbb{1} \quad | A^n \qquad +$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{0} = a_0 \mathbb{1} + a_1 A + \dots + a_n A^n = w_T(A)$$

bo następują skrócenia ▨

Zadanie.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{2014} =$$

$$w_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 3 \\ 2 & (4-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$\Delta = 25 - 4\cdot(-2) = 25 + 8 = 33$$

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

dzielimy wielomian λ^{2014} przez wiel. $w_T(\lambda)$, wynik jakiś $q(\lambda)$ i reszta z dzielenia $r(\lambda)$.

$$\lambda^{2014} = q(\lambda) \underbrace{w_T(\lambda)}_{\text{wielomian stopnia 2}} + \underbrace{a\lambda + b}_{=r}$$

reszta jest wielomianem stopnia 1

$\lambda \rightsquigarrow A$

$$A^{2014} = q(A) \underbrace{w_A(A)}_{=0} + aA + b\mathbb{1} = aA + b\mathbb{1}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda^{2014}$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^{2014} &= a\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right) + b \\ \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^{2014} &= a\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right) + b \end{aligned}\right\}$$

$$a = \frac{\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^{2014} - \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^{2014}}{2}$$

$$b = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^{2014} - \frac{\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)^{2014} - \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^{2}}{2} \cdot \frac{5+\sqrt{33}}{2}$$

21.10.14r.

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow W_T(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$$

↖ wielomian stopnia n

$$W_T(A) = a_0\mathbb{1} + a_1 A + \ldots + a_n A^n = 0$$

użyteczne do wyliczenia np.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}; \quad A^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & i^n \end{bmatrix}$$

wówczas $$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^1 \end{bmatrix}$$

Definicja 1.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$ oraz $T: X \to X$ będzie operatorem liniowym.
Mówimy, że T jest operatorem diagonalizowanym jeśli istnieje baza $\mathcal{E}$ przestrzeni X, w której macierz operatora T jest diagonalna.

Pytanie: Które operatory są diagonalizowane?
- bez dodatkowej struktury na powyższe pytanie trudno jest odpowiedź

Przestrzenie wektorowe z iloczynem skalarnym

Przykład.

1.) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{k} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

← to przyporządkowanie jest przykładem iloczynu skalarnego na przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$

$$\downarrow$$

przykład iloczynu skalarnego na przestrzeni $\mathbb{C}^n$. $\quad \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i \in \mathbb{C}$

$$(\vec{u} | \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} u_i = (\vec{u} | \vec{u})$$

Def. 2 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Mówimy, że odwzorowanie $X \times X \ni (x, y) \longmapsto (x|y) \in \mathbb{F}$ nazywamy iloczynem skalarnym, jeśli spełnione są następujące warunki:

1.) $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} \quad \forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}} : (x | \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x|y_1) + \alpha_2 (x|y_2)$

2.) $\forall_{x, y \in X} : \quad (x|y) = \overline{(y|x)}$

3.) $\forall_{x \in X} : (x|x) \geq 0$

4.) $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Notacja:
$(x|x) = \|x\|^2$

Definicja 3 $\quad (X, (\cdot|\cdot))$ – przestrzeń z iloczynem skalarnym

Mówimy, że układ $\{x_1, \dots, x_m\} \subset X$ jest ortogonalny jeśli $\forall_{i=1..m} \quad x_i \neq 0$ oraz $\forall_{i,j} \; i \neq j \quad (x_i | x_j) = 0$

Układ ten nazywamy ortonormalnym jeśli dodatkowo $\forall_{i \in \{1, \dots, m\}} \quad \|x_i\| = 1$

Jeśli $\{x_1, \dots, x_m\}$ dodatkowo jest bazą to mówimy, że jest to baza ortonormalna X.

Przykład: $X = \mathbb{C}^2$ - iloczyn skalarny z 2.)

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ - baza standardowa ortonormalna

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}}_{f_2} \right\}$$

$$\|f_1\|^2 = \frac{1}{2}(1^2 + |i|^2) = 1 \qquad (f_1|f_2) = \frac{1}{2}(1 \cdot i - i \cdot 1) = 0$$

$$\|f_2\|^2 = \dots = 1$$

Można pokazać, że przestrzeń skończenie wymiarowa posiada bazę ortonormalną: ortogonalizacja Grama-Schmidta.

X, $\dim < \infty$; Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza ortonormalna.

Współrzędne wektora $x \in X$ w bazie $\mathcal{E}$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

dlugc: $(e_i | x) = (e_i | \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_i | e_j) = \alpha_i$

Dalej:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

$$(x|y) = (\sum_i \alpha_i e_i | \sum_j \beta_j e_j) = \sum_{ij} \bar{\alpha_i} \beta_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha_i} \beta_i$$

Stwierdzenie → Nierówność Bessela.

Niech $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ - układ ortonormalny

$x \in X$ $\alpha_i = (x_i | x)$. Wówczas: $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$

1.) $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$

2.) $\forall_{i \in 1,\dots,k}$ x_i jest prostopadły do $x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

Dowód. 1)

$$\tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

$$0 \leqslant \|\tilde{x}\|^2 = (\tilde{x}|\tilde{x}) = \Big(x - \sum_i \alpha_i x_i \,\Big|\, x - \sum_j \alpha_j x_j\Big) = (x|x) - \sum_j \alpha_j \overbrace{(x|x_j)}^{\bar{\alpha}_j} -$$

$$- \sum_i \bar{\alpha}_i \overbrace{(x_i|x)}^{\alpha_i} + \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (x_i|x_j) = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 + \sum_i |\alpha_i|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=i}^{k} |\alpha_j|^2$$

Dowód. 2.)

$$\Big(x_i \,\Big|\, x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\Big) = \alpha_i - \Big(x_i \,\Big|\, \sum_j \alpha_j x_j\Big) = \alpha_i - \alpha_i = 0.$$

Wniosek:

Nierówność Cauchy-Schwarza.

$x, y \in X$ to $|(x|y)| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Jest łatwy wniosek z nierówności Bessela.

Założenie, że $x \neq 0$, $\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$, $y \in X$.

$$\alpha_1 = \left(\frac{x}{\|x\|} \,\Big|\, y\right) \Rightarrow \|y\|^2 \geqslant |\alpha_i|^2 = \left|\left(\frac{x}{\|x\|} \,\Big|\, y\right)\right|^2$$

nierówność Bessela

$$\Rightarrow \|y\|^2 \geqslant \frac{1}{\|x\|^2} |(x|y)|^2$$

Stwierdzenie:

→ Nierówność Minkowskiego:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – nierówność trójkąta.

Dowód:

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x\mid x) + (x\mid y) + (y\mid x) + (y\mid y) =$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x\mid y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x\mid y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

nier. C.Schw.

Ortogonalizacja Grama – Schmidta:

Input: układ $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X$ liniowo niezależne

Krok 1.

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

Krok $l+1$.

Mamy już l pierwszych wektorów: $y_1, y_2, \dots, y_l$.

Konstruujemy y_{l+1}:

a) $\tilde{y}_{l+1} = x_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_i \quad \alpha_i = (y_i \mid x_{l+1})$

b) $y_{l+1} = \dfrac{\tilde{y}_{l+1}}{\|\tilde{y}_{l+1}\|}$

output: układ $\{y_1, \dots, y_k\} \subset X$ ortonormalny

Lemat Riesza.

Ustalmy (niezerowy) wektor $x_0 \in X$

$X \ni x \longmapsto (x_0 | x) \in \mathbb{C}$

jest to odwzorowanie liniowe.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \longmapsto (x_0 | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 (x_0 | x_1) + \alpha_2 (x_0 | x_2)$

Lemat Riesza. funkcjonał liniowy

Niech $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie odwzorowaniem liniowym.
Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony wektor $x_0 \in X$, tak, że $\Psi(x) = (x_0 | x)$.

Sprzężenie hermitowskie operatorów.

$(X, (\cdot|\cdot)_X)$ $(Y, (\cdot|\cdot)_Y)$

odwzorowanie

Niech $T : X \to Y$. Ustalmy $y_0 \in Y$.

$X \ni x \longmapsto (y_0 | Tx)_Y \in \mathbb{C}$.

odwzorowanie liniowe.

Z lematu Riesza $\exists! \, x_0 \in X$

$(x_0 | x)_X = (y_0 | Tx)_Y$

To definiuje $T^* : Y \to X$, tak, że $T^* y_0 = x_0$

W takim razie:

$(T^* y_0 | x)_X = (y_0 | Tx)_Y$

Wyrażenie w bazach ortonormalnych X i Y.

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza X

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ - baza Y

$$\left.\begin{array}{l} [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [a_{ij}]_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} \text{ gdzie } a_{ij} = (f_i | Te_j) = (T^* f_i | e_j) \\ [T^*]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = [b_{ji}] \text{ -- " -- " -- } b_{ji} = (e_j | T^* f_i)_X \end{array}\right\} \Rightarrow a_{ij} = \overline{b_{ji}}$$

Wniosek:

„Sprzężenie hermitowskie = transpozycja i sprzężenie zespolone."

Przykład:

$X = \mathbb{C}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

$X = \mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ taki, że $T = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \\ 1+i & 5-i \end{bmatrix}$ $T^* = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & 5+i \end{bmatrix}$

$T^*: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$

Definicja 4:

$T: X \to X$. Mówimy, że T jest:

1.) operatorem normalnym, jeśli $T^*T = TT^*$

2.) operatorem unitarnym, jeśli $T^*T = TT^* = 1$

3.) operatorem samosprzężonym, jeśli $T^* = T$

Przykład:

$X = \mathbb{C}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ - jest operatorem unitarnym.

$$T^*T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1, & i-i \\ i-i, & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga:

T jest unitarny $\Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Przykład:

X - jak wyżej $\quad T = \begin{bmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$ - operator samosprzężony.

Twierdzenie spektralne.

ciało liczb zespolonych

28.10.14

Niech $(X, (\cdot|\cdot))$ będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym, $\dim X < \infty$. Niech $T: X \to X$ będzie operatorem normalnym na X. Wówczas istnieje baza $\mathcal{E}$ ortonormalna przestrzeni X złożona z wektorów własnych operatora T.

$$TT^* = T^*T$$

Przykład: Co to oznacza dla macierzy 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \qquad A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

Załóżmy, że $A^* = A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha, \delta \in \mathbb{R} \\ \beta = \overline{\gamma} \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

Przykład konkretny:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie spektralne gwarantuje, że unormowane wektory własne macierzy A dają bazę $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{C}^2$.

$$[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in Sp(A) \text{ - zbiór wartości własnych.}$$

Stwierdzenie 1.

Niech $T: X \to X$ będzie operatorem normalnym ~~$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$~~

$x_1, x_2 \in X$ wektory własne T o różnych wartościach własnych $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \mu$. Wówczas x_1, x_2 są wektorami prostopadłymi $(x_1|x_2)=0$.

Stwierdzenie 0.

T - operator normalny na X. Wówczas $\ker T = \ker T^*$

W szczególności $\ker(T - \lambda \mathbb{1}) = \ker(T^* - \overline{\lambda}\, \mathbb{1})$

zbiór wektorów wł. T o wartości wł. λ

zbiór wektorów własnych operatora T^* o wartości wł. $\overline{\lambda}$.

Dowód.

$$x \in \ker T \Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow (x \mid T^*Tx) = 0 \Rightarrow (x \mid TT^*x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T^*x \mid T^*x) = 0 \Rightarrow \|T^*x\|^2 = 0 \Rightarrow T^*x = 0 \Rightarrow x \in \ker T^*.$$

$$\ker T = \ker T^*. \quad (\star)$$

Stosując $(\star)$ do operatora $(T - \lambda \mathbb{1})$ otrzymuję:

$$\ker(T - \lambda \mathbb{1}) = \ker((T - \lambda \mathbb{1})^*) = \ker(T^* - (\lambda \mathbb{1})^*) = \ker(T - \bar{\lambda} \mathbb{1})$$

Dowód stwierdzenia 1.

x_1, x_2 – j.w. $\qquad \lambda \neq \mu$

(Chcemy pokazać, że wektory własne o różnych wartościach własnych są do siebie prostopadłe).

$$\mu(x_1 \mid x_2) = (x_1 \mid \mu x_2) = (x_1 \mid Tx_2) = (T^*x_1 \mid x_2) = (\bar{\lambda} x_1 \mid x_2) =$$
$$= \lambda(x_1 \mid x_2)$$

$(\mu - \lambda)(x_1 \mid x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 \mid x_2)$ tzn. $x_1 \perp x_2$.

Stwierdzenie

Niech $T: X \to X$ będzie operatorem samosprzężonym.
Wówczas $sp(T) \subset \mathbb{R}$.

Dowód.

$x \in X \setminus \{0\}$, $Tx = \lambda x$, $T^* = T$

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda(x \mid x) = (x \mid \lambda x) = (x \mid Tx) = (T^*x \mid x) = (Tx \mid x) = (\lambda x \mid x) = \bar{\lambda}(x \mid x) = \bar{\lambda}\|x\|^2$$

$$\lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, czyli sp $T \subset \mathbb{R}$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$\vec{u}\vec{v} = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Stwierdzenie:

Niech $T: X \to X$ będzie operatorem unitarnym. Wówczas $\operatorname{sp} T \subset S^1$.

Dowód:

$T^*T = 1 = TT^*$ - unitarność

$x \in X \setminus \{0\}$ $\quad Tx = \lambda x$.

$(x|x) = (x|T^*Tx) = (Tx|Tx) = (\lambda x|\lambda x) = \bar{\lambda}\lambda(x|x) \Rightarrow \bar{\lambda}\lambda = 1$

$|\lambda| = 1 \quad \lambda \in S^1$.

Stwierdzenie

Operator $T: X \to X$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x \in X} \ \|Tx\| = \|x\|$

Dowód:

$$T^*T = 1 = TT^* \Rightarrow \forall_{x \in X}, \underbrace{(x|x)}_{\|x\|^2} = (x|T^*Tx) = (Tx|Tx) = \|Tx\|^2$$

W drugą stronę:

$\|x\| = \|Tx\| \Rightarrow (x|x) = (Tx|Tx) = (x|T^*Tx)$

Uwaga:

Jeśli S_1, S_2 - operatory na X takie, że $(x|S_1x) = (x|S_2x) \Rightarrow S_1 = S_2$.

Stosując uwagę do $S_1 = T^*T$ oraz $S_2 = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} = T^*T = TT^*$.

Dowód twierdzenia spektralnego.

Indukcja ze względu na $\dim X$.

Krok 1.

Zakładamy, że $\dim X = 1$.

$0 \neq x \in X \quad Tx = \lambda x \quad \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ - baza przestrzeni X

Krok 2.

Zakładamy, że twierdz. spektralne udowodniliśmy dla operatorów normalnych na przestrzeniach n-wymiarowych.

Niech $T: X \to X$ będzie operatorem normalnym, $\dim X = n+1$.

Niech $w_T(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym T.

Niech λ_0: $w_T(\lambda_0)=0$, czyli λ_0 jest wartością własną T.

Niech $x_0 \in X \setminus \{0\}$ będzie wektorem własnym o wartości własnej λ_0.

Redukujemy problem do przestrzeni n-wymiarowej Y: $\quad Tx_0 = \lambda_0 x_0$

$$Y = \{x \in X : (x_0|x) = 0\} = x_0^{\perp}$$

$$\dim Y = \dim X - 1 = n+1-1 = n.$$

Redukujemy operator:

$$S: Y \to Y : \; Sy = Ty \quad \text{dla } y \in Y$$

Jest to dobrze zdefiniowane pod warunkiem, że $\forall y \in Y$ mamy $Ty \in Y$. Zobaczmy: $Ty \in Y \iff (x_0|Ty) = (T^* x_0|y) = (\bar{\lambda}_0 x_0|y) = \lambda_0 \underbrace{(x_0|y)}_{=0}$.

(Udowodniliśmy, że tak zdefiniowane S jest operatorem na przestrzeni Y - łatwo się to sprawdza. E_Y - baza ortonormalna wektorów własnego S. Biorąc $E = E_Y \cup \{x_0\}$ dostaję bazę spełniającą tezę twierdz. spektralnego. Udowodniliśmy też, że iloczyn ostatecznie zeruje się.)

TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

B1	B2	B3
N	Z	Z

Reguły gry:

Krok 1. Wybieramy bramkę, np. B1

Krok 2. Dowiaduję się, w której spośród pozostałych bramek jest Z.

Jak w to grać?

Strategia 1. Pierwszy wybór jest święty i nie zmieniam bramki.

Strategia 2. Zmieniamy bramkę na tę, która nie została wskazana.

Żeby wybrać strategię musimy zbudować „model probabilistyczny" powyżej opisanego doświadczenia losowego.