Zdarzenia elementarne.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych: (zbiór) 0 - brak zmiany, 1 - zmiana

$\omega_1 = (B_1, 0)$ $\omega_2 = (B_2, 0)$ $\omega_3 = (B_3, 0)$

$\omega_4 = (B_1, 1)$ $\omega_5 = (B_2, 1)$ $\omega_6 = (B_3, 1)$

Zdarzenia sprzyjające wygranej:

$A = \{\omega_1, \omega_5, \omega_6\}$ $P_{wygranej} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Strategia 1.

$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

$A_1 = \{\omega_1\}$ $P^1_{wygranej} = \frac{1}{3}$

Strategia 2.

$\Omega_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

$A_2 = \{\omega_5, \omega_6\}$ $P^2_{wygranej} = \frac{2}{3}$

Definicja 1.

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

- Ω - zbiór niepusty (zbiór zdarzeń elementarnych), np: $\{1, 2, \dots, 6\}$.
  Elementy Ω nazywamy zdarzeniami elementarnymi. (przykład zdarzeń $\omega \in \Omega$)
- $\mathcal{F}$ - rodzina podzbiorów Ω (zdarzenia losowe)
  Elementy $\mathcal{F}$ są podzbiorami Ω (przykład A)
  + własności.

  Własności rodziny $\mathcal{F}$: 04.11.'14r.

  1.) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

  2.) jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ (dopełnienie)

  3.) $A_i \in \mathcal{F}$ $i \in \mathbb{N}$ to $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

  Elementy $\mathcal{F}$ nazywamy zdarzeniami.
- P jest funkcją określoną na $\mathcal{F}$ o wartościach w $[0, 1]$ $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$
  taką, że: (P przypisuje podzbiorom prawdopodobieństwo liczbę).

1.) $P(\Omega)=1$

2.) jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ $i \in \mathbb{N}$, także $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Wniosek:

1.) $P(\emptyset)=0$

2.) $P(\Omega \setminus A) + P(A) = 1$

Ad. 1.) $A_i = \emptyset$ $i \in \mathbb{N}$

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset)=0$$

Ad. 2.) z 1.) wynika: $A_1, \dots, A_n$: $A_i \cap A_j = \emptyset$

dla $i \neq j$ to $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Zauważmy, że $A \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset$ oraz $A \cup \Omega \setminus A = \Omega$.

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\Omega \setminus A)$$

Przykład:

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie n osób, dwie lub więcej osób ma urodziny w tym samym dniu.

Podać rozwiązanie w języku odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$\Omega = \{(k_1, k_2, \dots, k_n): k_i \in \overline{1,365}\}$

$|\Omega| = 365^n$ - liczba wariacji z powtórzeniami zbioru $[1, 365]$

Interesuje nas zbiór

A tych n-elementowych ciągów, które mają „co najmniej jedno powtórzenie".

$\frac{|A|}{\Omega}$ oznacza $= p(n)$ - prawdopodobieństwo tego, że w grupie n osób dwie lub więcej osób ma urodziny tego samego dnia. Załóżmy.

Niech $A' = \Omega \setminus A$ - n-elementowe ciągi dat bez powtórzeń

$|A'| = \frac{365!}{(365-n)!}$ - liczba wariacji bez powtórzeń zbioru $[1, 365]$

$$p(n) = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365(n-1))}{365^n}$$

n	$p(n)$
10	11,7 %
20	41,1 %
23	50,7 %
50	97 %
57	99%
100	99,99997%

Schematy kombinatoryczne

Definicja 2.

Niech Y będzie zbiorem n-elementowym

k-elementową wariacją z powtórzeniami zbioru Y nazywamy dowolną funkcję

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to Y$$

Równoważnie piszemy $(f(1), f(2), f(3), \ldots, f(k))$

Kolejność jest istotna.

Oznaczenie A_k^n - liczba wariacji z powtórzeniami.

$$A_k^n = n^k$$

Definicja 3.

Y j.w. k-elementową wariację bez powtórzeń zbioru Y nazywamy każdą różnowartościową funkcję

$$f : \{1, 2, \ldots, k\} \to Y$$

$(f(1), f(2), \ldots, f(k))$ - nie ma powtórzeń, kolejność jest istotna

Oznaczenie: $V_k^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definicja 4

Y j.w. k-elementowa kombinacja to ~~kolejn~~ k-elementowy podzbiór Y.
$\{y_1, y_2, \ldots y_k\}$ kolejność nie jest istotna. Brak powtórzeń.

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Definicja 5.

Permutacja elementów zbioru Y to n-elementowa wariacja bez powtórzeń.

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Przykład.

Populację o liczebności n dzielimy na k-części o liczebnościach $r_1, r_2, \ldots, r_k$, gdzie $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.
Znaleźć liczbę takich podziałów.
Wyznaczyć szansę tego, że daty urodzin 34 osób rozkładają się następująco: 6 miesięcy po 3 osoby, 2 miesiące po 4 osoby i 4 miesiące po 2 osoby.

dla uproszczenia $k=4$.

$$\binom{n}{r_1}\cdot\binom{n-r_1}{r_2}\cdot\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\binom{n-r_1-r_2-r_3}{r_4} =$$

$$= \frac{n!}{r_1!\cancel{(n-r_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-r_1)!}}{r_2!\cancel{(n-r_1-r_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-r_1-r_2)!}}{r_3!\,(n-r_1-r_2-r_3)!} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\,r_3!\,r_4!}$$

Ogólnie $\dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$

Jak wygląda przestrzeń zdarzeń elementarnych?
$\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_{34}) : \ k_i \in [1, 12]\}$.
$|\Omega| = 12^{34}$

A – ciągi spełniające warunek zadania.

$$|A| = \frac{12!}{6!\,2!\,4!} \cdot \frac{34!}{\underbrace{3!\cdot 3!\ldots 3!}_{6}\cdot\underbrace{4!\cdot 4!}_{2}\cdot\underbrace{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}_{4}} \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe.

Definicja 6:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $B \in \mathcal{F}$, tak że $P(B) \neq 0$

Niech $A \in \mathcal{F}$. Prawdopodobieństwem zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło B definiujemy jako $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ i nazywamy prawdopodobieństwem B-warunkowym zdarzenia A oraz oznaczamy symbolem $P(A|B)$.

Przykład.

Rzucamy dwoma kostkami. Znając sumę liczby oczek $=5$, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że na pierwszej kostce liczba oczek ≤ 2.

Rozwiązanie 1.

$\Omega = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$D = \{(1,4),(2,3)\}$ $\quad P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Rozwiązanie 2.

$B = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$P(B) = \frac{4}{36}$ $\quad A \cap B = \{(1,4),(2,3)\}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$P(A|B) = \frac{2}{36} / \frac{4}{36} = \frac{2}{4}$

Stwierdzenie.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – przestrzeń probabilistyczna. Niech $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ oraz $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Wówczas $\forall B \in \mathcal{F}$ $\quad P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

Dowód

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Wzór Bayesa:

$P(A|B)$ jaki jest związek $P(B|A)$

Niech A_i, B będą j.w.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Przykład.

Test wykrywający zakażenie pewnym wirusem mający skuteczność 95%: prawdopodobieństwo wykrycia wirusa u osoby chorej wynosi 95%, a u zdrowej 5%. Załóżmy, że $\frac{1}{1000}$ populacji jest nosicielem wirusa.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba, u której test stwierdził wirusa jest rzeczywiście jego nosicielem?

C-chory, Z-zdrowy, T-wynik pozytywny, N-w. negatywny

$P(C|T) = ?$

Wiemy, że:

$P(T|C) = 0{,}95$

$P(T|Z) = 0{,}05$

$P(C) = 0{,}001$

$P(Z) = 0{,}999$

$$P(C|T) = \frac{P(T|C)\,P(C)}{P(T|Z)P(Z) + P(T|C)P(C)} = \frac{0{,}95 \cdot \frac{1}{1000}}{\frac{5}{100}\cdot\frac{999}{1000} + \frac{95}{100}\cdot\frac{1}{1000}} =$$

$= 0{,}0186 < 2\%$

2% jest znacznie większe niż 0,1%.

Ad. Przestrzeń probabilistyczna. 18.11.14

Pytanie: Jaka przestrzeń probabilistyczna modeluje doświadczenie polegające na losowaniu punktów z odcinka $[0,1]$, tak że wylosowanie każdego punktu jest równie prawdopodobne.
Czy istnieje przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taka, że:

a) $\Omega = [0,1]$

b) $[a,b] \in \mathcal{F}$ dla wszystkich $0 \leq a < b \leq 1$

c) $P([a,b]) = b-a$.

Odpowiedź: Niech $\mathcal{F}$ będzie najmniejszą rodziną podzbiorów Ω, taką, że: $\forall_{0 \leq a < b \leq 1}$, $[a,b] \in \mathcal{F}$ oraz spełniające aksjomaty przestrzeni probabilistycznej dotyczące $\mathcal{F}$.
istnieje dokładnie 1
Wówczas $\exists! P : \mathcal{F} \to [0,1]$ spełniająca aksjomaty przestrzeni probabilistycznej i ma własność c).

Prawdopodobieństwo B-warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definicja 1: Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Uwaga: równoważnie $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Przykład: Rzucamy dwiema symetrycznymi identycznymi monetami. $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
Rozważmy trzy zdarzenia losowe: O_1, O_2, S.
O_1 – na monecie 1 wypadł orzeł; $O_1 = \{(0,0),(0,1)\}$.
O_2 – na drugiej monecie wypadł orzeł; $O_2 = \{(0,0),(1,0)\}$.
S – na obu monetach mamy to samo; $S = \{(0,0),(1,1)\}$. $P(S) = \frac{1}{2}$.
Zdarzenia O_1, O_2, S są parami niezależne:
np. $P(O_1, O_2) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{4} = P(O_1) \cdot P(O_2)$, itd.
(Nie można powiedzieć, że te trzy zbiory są niezależne statystycznie)

Ad. Przestrzeń probabilistyczna. 18.11.14.

Pytanie: Jaka przestrzeń probabilistyczna modeluje doświadczenie polegające na losowaniu punktów z odcinka $[0,1]$, tak, że wylosowanie każdego punktu jest równie prawdopodobne.

Czy istnieje przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taka, że:

a) $\Omega = [0,1]$

b) $[a,b] \in \mathcal{F}$ dla wszystkich $0 \leq a < b \leq 1$

c) $P([a,b]) = b - a$.

Odpowiedź: Niech $\mathcal{F}$ będzie najmniejszą rodziną podzbiorów Ω, taką że: $\forall_{0 \leq a < b \leq 1}$, $[a,b] \in \mathcal{F}$ oraz spełniające aksjomaty przestrzeni probabilistycznej dotyczące $\mathcal{F}$.

Wówczas (istnieje dokładnie 1) $\exists! P: \mathcal{F} \to [0,1]$ spełniająca aksjomaty przestrzeni probabilistycznej i ma własność c).

Prawdopodobieństwo B-warunkowe:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definicja 1: Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Uwaga: równoważnie $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Przykład: Rzucamy dwiema symetrycznymi identycznymi monetami. $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Rozważmy trzy zdarzenia losowe: O_1, O_2, S.

O_1 – na monecie 1 wypadł orzeł; $O_1 = \{(0,0), (0,1)\}$.

O_2 – na drugiej monecie wypadł orzeł; $O_2 = \{(0,0), (1,0)\}$

S – na obu monetach mamy to samo; $S = \{(0,0), (1,1)\}$. $P(S) = \frac{1}{2}$.

Zdarzenia O_1, O_2, S są parami niezależne:

np. $P(O_1, O_2) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{4} = P(O_1) \cdot P(O_2)$, itd.

(Nie można powiedzieć, że te trzy zbiory są niezależne statystycznie)

Zauważmy, że trójka O_1, O_2 i S nie jest niezależna statystycznie
$O_1 \cap O_2 \subset S$, $O_1 \cap S \subset O_2$, $O_2 \cap S \subset O_1$.

Definicja 2:
Mówimy, że rodzina zdarzeń elementarnych $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest statystycznie niezależna jeśli $\forall_{1 \le k \le n}$ oraz $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ zachodzi równość: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.
Wracając do przykładu:
$P(O_1 \cap O_2 \cap S) = P(\{0,0\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(O_1) \cdot P(O_2) \cdot P(S)$

„Jak w terminach teorii prawdopodobieństwa modelujemy zdarzenia niezależne"?
Mamy 2 przestrzenie.
Niech $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.
$\exists! (\Omega, \mathcal{F}, P)$ taki, że:

1.) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
2.) $\mathcal{F}$ jest najmniejszą rodziną podzbiorów Ω, taką, że $\forall_{A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2}: A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$.
3.) $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ oraz $P(A_1 \times A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

Schemat Bernoulliego

Rozpatrzmy doświadczenie losowe o dwóch możliwych wynikach $\Omega = \{0, 1\}$, które są uzyskiwane z prawdopodobieństwem p, q (- odpowiednio).
Jakie jest prawdopodobieństwo $P_{n,k}$, tego że przy n-krotnym powtórzeniu tego doświadczenia otrzymamy k-razy wynik 0?

$$\Omega = \underbrace{\{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{n\text{-razy}}$$

Elementy tej przestrzeni to ciągi $\underbrace{(0,1,1,\dots,0)}_{k \text{ orłów}}$ - prawdopodob. $p^k q^{n-k}$

liczba zdarzeń sprzyjających wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zatem:

$$\boxed{P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \quad \text{- schemat Bernoulliego}$$

Ustalmy liczbę $n, k \in \mathbb{N}$.

Niech $A_{n,k} = \{$ 2n - elementowe ciągi rzutów monetą : | liczba orłów - liczba reszek | $\leq 2k\}$

$$P(A_{n,k}) = \sum_{j=n-k}^{n+k} \binom{2n}{j} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \xrightarrow[\text{a } z\ n \to \infty]{\text{ustalimy } k} 0$$

schemat Bernoulliego

daje się udowodnić, że granica ta dąży do 0.

Definicja 3:

Zmienna losowa na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest to każda funkcja $X: \Omega \to \mathbb{R}$ taka, że: $\forall_{-\infty \leq a < b \leq \infty}$ mamy $\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F} \overset{\text{ozn.}}{=} X^{-1}([a,b])$ → jeśli $a=b$ to będziemy pisali $X^{-1}(\{a\})$

Uwaga: Powyższy zbiór jest zdarzeniem losowym, można mu przypisać prawdopodobieństwo.

Przykład. ustalmy $A \in \mathcal{F}$

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in A \end{cases}$$

zmienna losowa w przestrzeni

Przykład:

$$\Omega = \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,\dots,6\} \ni (i,j) \longmapsto X((i,j)) = i+j$$

wartości zmiennej X

$$\begin{cases} 2 & \{(1,1)\} = X^{-1}(\{2\}) \overset{\text{ozn.}}{=} \{X=2\} \\ 3 & \{(1,2),(2,1)\} = X^{-1}(\{3\}) \overset{\text{ozn}}{=} \{X=3\} \\ 4 & \{(1,3),(2,2),(3,1)\} = X^{-1}(\{4\}) \overset{\text{ozn}}{=} \{X=4\} \\ \vdots & \vdots \\ 12 & \{(6,6)\} = X^{-1}(\{12\}) \overset{\text{ozn}}{=} \{X=12\} \end{cases}$$

$$X = \sum_{j=2}^{12} j \cdot \chi_{\{X=j\}}$$

Wartość oczekiwana zmiennej X:

$$\mathcal{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$
$$= \sum_{j=2}^{12} j \cdot P(\{X=j\})$$

Definicja 4.

Mówimy, że zmienna losowa jest dodatnia jeśli $\forall \omega \in \Omega \ X(\omega) \geq 0$.

Mówimy, że dodatnia zmienna losowa X jest dyskretna jeśli $\exists$ ciąg $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, $x_i \geq 0$ taki, że $X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{\{X = x_i\}}$

Wartością oczekiwaną takiej zmiennej losowej nazywamy liczbę $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(\{X = x_i\})$.

Ogólniej interesują nas zmienne losowe dyskretne postaci $X = X_+ - X_-$, gdzie X_+, X_- - j. w. oraz t, że $\mathcal{E}(X_+) < \infty$, $\mathcal{E}(X_-) < \infty$

Wówczas definiujemy wartość oczekiwaną:

$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X_+) - \mathcal{E}(X_-)$. Takie zmienne nazywamy całkowalnymi

Liniowość wartości oczekiwanej:

Stwierdzenie:

Niech X_1, X_2 będą dyskretnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi.

Wówczas $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ zmienna $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ jest dyskretną całkowalną zmienną losową oraz $\mathcal{E}(X) = \alpha_1 \mathcal{E}(X_1) + \alpha_2 \mathcal{E}(X_2)$.

Dowód: (ćwiczenie!).

Co jeśli $X \geq 0$, ale nie jest dyskretna?

$\forall n \in \mathbb{N}$ definiujemy n-te przybliżenie X zmienną dyskretną X_n, gdzie $X_n = \sum_{l=1}^{n \cdot 2^n} \frac{l-1}{2^n} \cdot \chi_{\{\frac{l-1}{2^n} \leq X < \frac{l}{2^n}\}}$

Własności X_n:

1.) $\forall \omega \in \Omega : X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$

2.) $\forall \omega \in \Omega \ \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

Definiujemy $\mathcal{E}(X)$ wzorem:

$$\mathcal{E}(X) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}(X_n)$$

DYSTRYBUANTA I GĘSTOŚĆ ZMIENNEJ LOSOWEJ, A WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\})$$

<u>Własności dystrybuanty:</u>

1.) $t_1 \leq t_2$ to $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$

2.) Uwaga F_X nie musi być ciągła, ale jest ciągła z prawej strony. $\lim\limits_{t \searrow t_0} F_X(t) = F_X(t_0)$

Mówimy, że X ma gęstość jeśli dystrybuanta F_X jest funkcją różniczkowalną. Wówczas gęstość ς_X definiujemy wzorem:

$$\varsigma_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = F_X(t).$$

Stwierdzenie.

Jeśli X jest całkowalna i posiada gęstość to wartość oczekiwana x

$$\mathcal{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \varsigma_X(t)\, dt$$

25.11.14r.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa

Jeśli $X(\omega) \geq 0$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$ to $\mathcal{E}(X) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Jeśli X przyjmuje wartości dodatnie i ujemne to przedstawiamy $X = X_+ - X_-$.

gdzie
$$X_+(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{jeśli } X(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{jeśli } X(\omega) \leq 0. \end{cases}$$

$$X_-(\omega) = \begin{cases} -X(\omega) & \text{jeśli } X(\omega) \leq 0. \\ 0 & \text{jeśli } X(\omega) \geq 0. \end{cases}$$

$\chi^+ = \chi\{\omega : X(\omega) \geq 0\}$, $\chi^- = \chi\{\omega : X(\omega) \leq 0\}$ to

$$\chi^+ + \chi^- = 1 \text{ oraz } X^+ = X \cdot \chi^+, \quad X^- = -X \cdot \chi^-$$

$$X^+ - X^- = X \cdot \chi^+ + X \cdot \chi^- = X \cdot (\chi^+ + \chi^-) = X.$$

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa X jest całkowalna jeśli $\mathcal{E}(X^+) < \infty$, $\mathcal{E}(X^-) < \infty$

Zmiennej całkowalnej przypisujemy wartość oczekiwaną wzorem: $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X^+) - \mathcal{E}(X^-)$

$$\mathcal{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

W teorii całki tak definiujemy całkę Lebesgue'a

Obserwacja

X - jest całkowalne $\Leftrightarrow \mathcal{E}(|X|) < \infty$.

$|X| = X_+ + X_-$; $\mathcal{E}(|X|) = \mathcal{E}(X_+) + \mathcal{E}(X_-) < \infty$

$\Updownarrow$

$\mathcal{E}(X_+), \mathcal{E}(X_-) < \infty$ ∎

Własności $\mathcal{E}$

1.) X_1, X_2 - całkowalne, $\forall_{\omega \in \Omega}\ X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ to $\mathcal{E}(X_1) \leq \mathcal{E}(X_2)$

2.) X_1, X_2 - całkowalne, to $aX_1 + bX_2$ jest całkowalne oraz $\mathcal{E}(aX_1 + bX_2) = a\mathcal{E}(X_1) + b\mathcal{E}(X_2)$

3.) Twierdzenie o zbieżności monotonicznej

Niech X_n – ciąg dodatnich zmiennych losowych,

t. że $\forall_{\omega \in \Omega}$ $X_{n+1}(\omega) \geq X_n(\omega)$

Zdefiniujmy $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$. Wówczas

$$\mathcal{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(X_n). \quad \left\{ \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega)\, dP(\omega) \right\}$$

4.) Twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej.

Niech X_n będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych,

t. że $\forall_{\omega \in \Omega}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$.

Niech $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$. Przypuśćmy, że istnieje całkowalna

zmienna losowa Y t. że $\forall n \; \forall_{\omega\in\Omega}$ $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$.

Wówczas $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(X_n) = \mathcal{E}(X)$. $\left\{ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega)\, dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) \right\}$

X - zmienna losowa $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$: $F_X(t) = P(\{\omega : X(\omega) \leq t\})$

dystrybuanta X.

gęstość $\rho_X(t) = F_X'(t)$

jeśli pochodna istnieje to mówimy, że X posiada gęstość

Obserwacja

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F_X'(t)\, dt = \int_a^b \rho_X(t)\, dt.$$

Stwierdzenie

Niech X będzie zmienną losową całkowalną posiadającą gęstość. Wówczas $\mathcal{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \rho_X(t)\, dt$.

Dowód. Bez straty ogólności $X \geq 0$

$\mathcal{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(X_n)$, gdzie $X_n = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \chi\left\{\omega : \frac{i-1}{2^n} < X(\omega) \leq \frac{i}{2^n}\right\}$

$$\mathcal{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} P\left(\left\{\omega : \frac{i-1}{2^n} < X \leq \frac{i}{2^n}\right\}\right) = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n}\left(F_X\left(\frac{i}{2^n}\right) - F\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \rho_X\left(\frac{i}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t \rho_X(t)\, dt$$

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

$\varphi(X)$ - też jest zmienną losową.

Można wykazać, że:

$$\mathcal{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, g_X(t)\, dt$$

np. $\mathcal{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} t^2 g_X(t)\, dt$ itd...

Przykład.

Znaleźć wartość oczekiwaną pola prostokąta, którego obwód wynosi 20, a jeden bok jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[1, 10]$.

X - zmienna losowa = długość wylosowanego boku.

Gęstość X: $g_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{dla } 1 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{dla } t < 1 \text{ lub } t > 10 \end{cases}$

Drugi bok $Y = 10 - X$ - zmienna losowa

Pole prostokąta $X \cdot (10 - X)$. W takim razie

$$\mathcal{E}(X(10-X)) = \int_1^{10} t(10-t) \cdot \frac{1}{9} dt = 18.$$

Definicja.

Niech X - zmienna losowa całkowalna, t. że X^2 też jest zmienną całkowalną. Wariancją X nazywamy liczbę

wariancja zmiennej X → $D^2(X) = \mathcal{E}((X - \mathcal{E}(X))^2) \in \mathbb{R}_+$

Własności wariancji:

1. $D^2(\overset{\text{skalar}}{a}X) = a^2 D^2(X)$, $D^2((X-a)) = D^2(X)$
2. $D^2(X) = \mathcal{E}(X^2) - (\mathcal{E}(X))^2$

Dowód: $D^2(X) = \mathcal{E}(X^2 - 2X \cdot \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(X)^2) = \mathcal{E}(X^2) - 2\,\mathcal{E}(X) \cdot \mathcal{E}(X) + \mathcal{E}(X)^2 =$

$= \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}(X)^2$ ∎

Definicja

Niech X, Y będą zmiennymi losowymi całkowalnymi, takimi że X^2, Y^2 też są całkowalne.
Wówczas kowariancję X i Y nazywamy liczbę
$\mathcal{E}((X-\mathcal{E}(X))(Y-\mathcal{E}(Y)))$ i oznaczamy symbolem
$cov(X,Y)$.

Uwaga: Dowodzi się, że kowariancja

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{\mathcal{D}^2(X)\mathcal{D}^2(Y)}$$

obie nierówności dowodzi się identycznie

Przypomnijmy nierówność Schwarza $|(V_1|V_2)| \leq \|V_1\| \|V_2\|$

Współczynnikiem korelacji X i Y nazywamy

$$\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathcal{D}^2(X)\cdot\mathcal{D}^2(Y)}} \overset{ozn.}{=} \varrho(X,Y)$$

$$-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$$

ZMIENNE:

1. Mówimy, że X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym, jeśli X jest postaci $X = a\cdot \chi\{X=a\} + b\cdot\chi(X=b)$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$

$p, q:$ $\quad p = \mathbb{P}(\{X=a\})$ $\quad p+q=1$

$\quad q = \mathbb{P}(\{X=b\})$ $\quad 0\leq p,q\leq 1$

$\mathcal{E}(X) = a\cdot p + b\cdot q$

$\mathcal{D}^2(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}(X)^2 = a^2p + b^2q - (ap+bq)^2 = pq(a-b)^2$

2. Zmienna X jest zmienną Bernouliego, jeśli $P(\{X=k\}) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Wartość oczekiwana $\mathcal{E}(X) = np$

$\mathcal{D}^2(X) = n\cdot p\cdot(1-p)$

3. Zmienne o rozkładzie Poissona:

$\exists_{\lambda>0}$ $P(\{X=k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2,\dots$

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

Zmienna Poissonowska jest przypadkiem granicznym zmiennej o rozkładzie Bernoulliego: biorąc $n\to\infty$, $p\to 0$, $n\cdot p=\lambda$ dostajemy

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ n\cdot p=\lambda\\ k\text{-ustalone}}} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\to \frac{\lambda^k}{k!}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{\to e^{-\lambda}} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \lim_{\substack{n\to\infty\\ k\text{-ustalone}}} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

Przykład.

Opracować prawdopodobieństwo wygranej w totolotka jeśli wypełniamy 10^7 kuponów. (korzystamy z rozkładu Poissonowskiego)

$$P=\frac{1}{\binom{49}{6}} \simeq 7\cdot 10^{-8}$$

$$\lambda = n\cdot p = \frac{7}{10}$$

$$P(\{X=0\}) = e^{-\lambda} \cong 0,4891$$

$$P(\{X=1\}) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^1}{1!} = 0,3498$$

$$P(\{X=2\}) = 0,1251$$

ZMIENNE POSIADAJĄCE GĘSTOŚĆ.

4. Zmienna o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a,b]$.

$$\rho_X(t) = \frac{1}{b-a}\cdot\chi_{[a,b]}(t)$$ wartość oczekiwana $\overset{}{a}$ — b

$$E(X)=\int_{\mathbb{R}} t\cdot\rho_X(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}t\,dt = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b t^2\,dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

5. X - zmienna o rozkładzie normalnym ze średnią μ oraz wariancją σ^2

$$g_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

6. Zmienna o rozkładzie χ^2 (chi kwadrat).

$$g_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \chi_{[0,\infty[}(t)$$

Jest gęstość zmiennej, która jest sumą kwadratów n zmiennych Gaussowskich: $\mathcal{E}(X) = n$ $\quad D^2(X) = 2n$

NIEZALEZNE ZMIENNE LOSOWE:

Definicja.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_k$ będą zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Mówimy, że $X_1, \ldots, X_k$ są niezależne jeśli $\forall A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}$

$$P(\{w: X_1(w) \in A_1, X_2(w) \in A_2, \ldots, X_k(w) \in A_k\}) =$$
$$= P(\{w: X_1(w) \quad A_1\}) \cdot P(\{w: X_2(w) \leq A_2\}) \cdot \ldots \cdot P(\{w: X_k(w) \leq A_k\})$$

Stwierdzenie

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, które są całkowalne. i takie $\mathcal{E}(X^2) < \infty$, $\mathcal{E}(Y^2)$.

wówczas:

(1) $\mathcal{E}(X \cdot Y) = \mathcal{E}(X) \cdot \mathcal{E}(Y)$

(2) $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

Uwaga: niezależność zmiennych losowych jest ~~własnością~~ własnością silniejszą niż zerowanie się współczynnika korelacji

02.12.'14r.

Przypomnienie: (Ω, F, P); $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ są niezależne jeśli $\forall A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ - odcinki.

$P(\{w \in \Omega : X_1(w) \in A_1, X_2 \in A_2\}) =$
$P(\{w \in \Omega : X_1(w) \in A_1\}) \cdot P(\{w \in \Omega : X_2(w) \in A_2\})$

Twierdzenie:

$X_1, \dots, X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ - niezależne zmienne losowe
t. że $\mathcal{E}(|X_i|) < \infty$ $i = 1, \dots, k$.
Wówczas iloczyn $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k$ posiada wartość oczekiwaną oraz $\mathcal{E}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_k) = \mathcal{E}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{E}(X_k)$.

Wniosek:

X_1, X_2 - niezależne to $cov(X_1, X_2) = 0$ oraz
$\mathcal{D}^2(X_1 + X_2) = \mathcal{D}^2(X_1) + \mathcal{D}^2(X_2)$

$$cov(X_1, X_2) = \mathcal{E}(\underbrace{(X_1 - \mathcal{E}(X_1))(X_2 - \mathcal{E}(X_2))}_{\text{niezależne zmienne losowe}}) =$$

$$= \mathcal{E}((X_1 - \mathcal{E}(X_1))) \, \mathcal{E}((X_2 - \mathcal{E}(X_2))) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\mathcal{D}^2(X_1 + X_2) = \mathcal{E}((X_1 + X_2 - \mathcal{E}(X_1 + X_2))^2) =$$
$$= \mathcal{E}((X_1 - \mathcal{E}(X_1) + X_2 - \mathcal{E}(X_2))^2) = \mathcal{E}((X_1 - \mathcal{E}(X_1))^2) + \mathcal{E}(X_2 - \mathcal{E}(X_2))^2 +$$
$$+ 2\mathcal{E}((X_1 - \mathcal{E}(X_1))(X_2 - \mathcal{E}(X_2))) = \mathcal{D}^2(X_1) + \mathcal{D}^2(X_2) + 2cov(X_1, X_2)$$
$$\overset{\text{niezależność}}{=} \mathcal{D}^2(X_1) + \mathcal{D}^2(X_2)$$

Dowód.

$k=2$ Założenie dodatkowe:

$$\text{dyskretność } X, Y \leftarrow \begin{cases} X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \chi\{X = x_i\} \\ Y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \, \chi\{Y = y_j\} \end{cases}$$

$x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(X\cdot Y) \overset{(*)}{=} \mathcal{E}\Big(\sum_{i,j} x_i y_j \, \chi_{\{X=x_i\}} \, \chi_{\{Y=y_j\}}\Big)$$

$$= \mathcal{E}\Big(\sum_{i,j} x_i y_j \, \chi_{\{X=x_i\}, Y=y_j\}}\Big)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j \, P(\{X=x_i, \; Y=y_j\}) \qquad \text{niezależność } X, Y$$

$$\sum_{i,j} x_i y_j \, P(\{X=x_i\}) P(\{Y_j=y_j\}) = \sum_i x_i P(\{X-x_i\}) \cdot \sum_j y_j P(\{Y-y_j\}) =$$

$$= \mathcal{E}(X)\cdot\mathcal{E}(Y).$$

Wnioski:

1.) X, Y - niezależne zmienne losowe

$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Wówczas $\mathcal{E}(\varphi_1(X)\cdot\varphi_2(Y)) = \mathcal{E}(\varphi_1(X))\cdot\mathcal{E}(\varphi_2(Y))$.

stosujemy poprzednie twierdzenie do niezależnych zmiennych losowych $\varphi_1(X), \varphi_2(Y)$

2.) Przypuśćmy, że X, Y są niezależne i mają gęstości ϱ_X, ϱ_Y. Niech ponadto $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i rozważmy zmienną losową $g(X, Y)$. Wówczas wartość oczekiwana

$$\mathcal{E}(g(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(s,t)\,\varrho_X(t)\,\varrho_Y(s)\,dt\,ds$$

Twierdzenie.

$X, Y, \varrho_X, \varrho_Y$ - j.w.

Wówczas zmienna $Z = X+Y$ posiada gęstość daną wzorem

$$\varrho_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} \varrho_X(s)\cdot\varrho_Y(t+s)\,ds$$

splot gęstości

Oznaczenie $\varrho_Z = \varrho_X * \varrho_Y$

Dowód.

$$\int_{[a,b]} \underbrace{\varrho_Z(s)}_{\text{funkcja } s}\,ds = P(\{Z\in[a,b]\}) = P(X+Y\in[a,b]) =$$

$$= P((X,Y)\in\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 : s+t\in[a,b]\}) \underset{\text{wniosek 2.)}}{=}$$

wniosek 2.) $\iint_{\mathbb{R}} \chi\{(s,t): s+t\in[a,b]\}\, \varrho_X(s)\, \varrho_Y(t)\, dt\, ds =$

$= \int_{\mathbb{R}} \varrho_Y(t) \left(\int_{a-t}^{b-t} \varrho_X(s)\, ds \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho_Y(t) \left(\int_a^b \varrho_X(s+t)\, ds \right) dt =$

$= \int_{[a,b]} ds \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \varrho_Y(t)\, \varrho_X(s+t)\, dt \right)}_{\text{funkcja od } s.}$

Wniosek:

$$\varrho_Z(s) = \int_{\mathbb{R}} \varrho_Y(t)\, \varrho_X(s+t)\, dt$$

Definicja.

Niech $X: \Omega \to \mathbb{R}$. Wówczas funkcję $\varphi_X(t)$ definiujemy wzorem:

$\varphi_X(t) = \mathcal{E}(e^{itX})$

Obserwacja 1.) X, ϱ_X, to $\varphi_X(t) = \mathcal{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{its} \varrho_X(s)\, ds$

2.) X, Y – niezależne zmienne losowe

$\varphi_{X+Y}(t) = \mathcal{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathcal{E}(e^{itX} \cdot e^{itY}) = \mathcal{E}(e^{itX}) \cdot \mathcal{E}(e^{itY}) =$

$= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$

Centralne Twierdzenie Graniczne – wprowadzenie

$X_1, X_2, \dots, X_k$ – niezależne zmienne losowe (o tym samym rozkładzie, posiadające wartość oczekiwaną i skończoną wariancję) o skończonej średniej i wariancji.

$\exists$ μ – średnia: $\mu = \mathcal{E}(X_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots$

σ – wariancja: $\sigma = \mathcal{D}^2(X_i)$

Rozważmy zmienną

$Y_n = X_1 + \dots + X_n$, $\quad \mathcal{E}(Y_n) = n \cdot \mu$

$\mathcal{D}^2(Y_n) = n \cdot \sigma$

$Z_n = \dfrac{(Y_n - n\mu)}{\sqrt{n\sigma}}$ $\leftarrow$ CTG: Z_n „zbiega” do zmiennej Gaussowskiej

CTG: $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[a,b]} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds.$$

Dowód.

Bez straty ogólności zał. że $\mu=0$, $\sigma=1$.

Wówczas: $$Z_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$$

Idea: Wykażemy, że φ_{Z_n} zbiega do funkcji Gaussowskiej.
Udowodnimy, że funkcja charakterystyczna zmiennej gaussowskiej jest funkcją Gaussa.

Dowód.

Obserwacja: $$\varphi_X(t) = \mathcal{E}(e^{itx}) = \mathcal{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\right) \overset{(*)}{\cong} 1 + \mathcal{E}(itx) - \frac{t^2}{2}\mathcal{E}(X^2)$$

$$\{\mu=0\} = 1 - \frac{t^2}{2}\cdot\sigma$$

Dalej: $$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}}(t) \overset{\text{niezależność}}{=\!=\!=}$$

$$= \varphi_{\frac{X_1}{\sqrt{n}}}(t)\cdots\varphi_{\frac{X_n}{\sqrt{n}}}(t) \overset{(*)}{=} \underbrace{\left(1-\frac{t^2}{2n}\sigma\right)\cdots\left(1-\frac{t^2}{2n\sigma}\right)}_{\text{iloczyn } n\text{-krotny}} =$$

$$= \left(1-\frac{t^2}{2n\sigma}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}$$

Ćwiczenie: Wyliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej o rozkładzie Gaussowskim.

$$\varrho_X(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\cdot s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(s^2-2its)}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}((s-it)^2+t^2)}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(s-it)^2}{2}}\, ds = \begin{Bmatrix} s'=s-it \\ ds'=ds \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s'^2}{2}}\, ds' = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Schemat Bernoulliego.

X - zmienna przyjmująca wartość 0 z prawd. q oraz 1 z prawd. p.

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ - niezależne zmienne losowe j.w.

Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ - zmienna o rozkładzie Bernoulliego

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Czy $\frac{S_n}{n}$ zbiega do p?

Twierdzenie. (Mocne prawo wielkich liczb).

Z prawdopodobieństwem równym 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p$.

Twierdzenie. (Słaba wersja).

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

Dowód.

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) = P(S_n \geq n(p+\varepsilon)) = \sum_{n(p+\varepsilon)\leq k\leq n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \left\{\begin{array}{l}\text{wprowadźmy} \\ \lambda > 0, \text{ zauważmy} \\ -\lambda(n(p+\varepsilon)-k) \geq 0\end{array}\right\}$$

$$\leq \sum_{n(p+\varepsilon)\leq k\leq n} e^{-\lambda(n(p+\varepsilon)-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-\lambda(n(p+\varepsilon)-k)} p^k q^{n-k} =$$

$$= e^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} (pe^{\lambda q})^k \cdot (qe^{-\lambda p})^{n-k} \cdot \binom{n}{k} = e^{-\lambda n\varepsilon}(pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ćw.} \\ pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p} \leq e^{\frac{\lambda^2}{8}}\end{array}\right\} \leq e^{-\lambda n\varepsilon} e^{\frac{\lambda^2 n}{8}} \{\lambda = 4\varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

Wniosek:

$$\forall_{\varepsilon>0} : \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Słabe prawo wielkich liczb.