

Tematy na egzamin ustny do wykładu

Algebra z Geometrią

1. Ciała - definicja i przykłady.
2. Ciało liczb zespolonych, konstrukcja.
3. Pierścień wielomianów, twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą.
4. Wielomiany stopnia 3, wzory Cardano.
5. Zasadnicze twierdzenie algebry - szkic dowodu.
6. NWD i Algorytm Euklidesa.
7. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste - przypadek \mathbb{R} i \mathbb{C} .
8. Grupy - aksjomaty i przykłady; podgrupy, homomorfizmy, jądro, obraz.
9. Grupy permutacji zbiorów skończonych. Orbity i ich własności. Rozkład na cykle.
10. Znak permutacji - konstrukcja i własności. Uzasadnienie tego, że $\text{sgn}(\pi)$ jest dobrze określony.
11. Przestrzenie wektorowe - definicja i przykłady.
12. Baza przestrzeni wektorowej. Twierdzenie o równoliczności baz. Wymiar przestrzeni wektorowej.
13. Odwzorowania liniowe - definicja i przykłady.
14. Dowód równości $\dim(X) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Ran}T)$.
15. Przestrzeń liniowa macierzy, mnożenie macierzy.
16. Macierz operatora. Mnożenie operatorów a mnożenie macierzy.
17. Przestrzeń sprzężona. Baza dualna. Przykłady funkcjonałów liniowych.
18. Druga sprzężona X'' . Kanoniczny izomorfizm X'' i X .
19. Odwzorowanie sprzężone T' . Macierz operatora T' a macierz T . Własności operacji sprzęgania.
20. Rząd operatora i rząd macierzy. Dowód równości $\text{rk}(T) = \text{rk}(T')$.
21. Wyznacznik - aksjomaty, istnienie i jedyność.
22. Rozwinięcie Laplacea i wzór na macierz odwrotną.

23. Układy równań liniowych - notacja macierzowa. Wykazać, że $RORNJ = RORJ + RSRJ$.
24. Wzory Cramera.
25. Formy dwuliniowe. Definicja i przykłady.
26. Przestrzeń form dwuliniowych. Macierz formy dwuliniowej.
27. Formy dwuliniowe symetryczne, formy kwadratowe. Formuła polaryzacyjna.
28. Macierz formy kwadratowej. Baza diagonalizująca, Twierdzenie Lagrange'a o istnieniu bazy diagonalizującej.
29. Twierdzenia Sylwestera o bezwładności. Sygnatura formy kwadratowej.
30. Szukanie sygnatury metodą Jacobiego.
31. Algebra endomorfizmów; podprzestrzenie niezmiennicze, podprzestrzenie redukujące i ich związek z operatorami rzutowymi.
32. Wektory i wartości własne, wielomian charakterystyczny. Krotność algebraiczna i geometryczna wartości własnej.
33. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona.
34. Twierdzenie o rozkładzie przestrzeni na sumę prostą przestrzeni pierwiastkowych.
35. Operatory diagonalizowalne - twierdzenie o związku między diagonalizowalnością a przestrzeniami pierwiastkowymi i własnymi.
36. Operatory nilpotentne. Twierdzenie o podprzestrzeniach redukujących dla operatora nilpotentnego.
37. Twierdzenie o istnieniu bazy Jordana.
38. Wielomiany i funkcje całkowite od operatory. Metody obliczania.
39. Przestrzenie z iloczynem skalarnym. Definicja i przykłady. Tożsamości polaryzacyjne.
40. Nierówność Bessela. Nierówność Cauchy-Schwarza.
41. Ortogonalizacja Grama - Schmidta. Istnienie bazy ortonormalnej.
42. Dopelnienie ortogonalne. Rozkład przestrzeni na sumę prostą $X = Y \oplus Y^\perp$.
43. Lemat Riesz.

44. Sprzężenie hermitowskie operatora. Definicja, dowód istnienia i własności operacji sprzężenia hermitowskiego. Macierz T^* w bazie ortonormalnej.
45. Operatory normalne, unitarne i samosprężone. Spektrum i wartości własne operatorów normalnych i ich sprzężeń. Spektrum operatorów unitarnych i samosprężonych.
46. Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych.
47. Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprężonych, przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
48. Odległość punktu od podprzestrzeni. Miara układu wektorów. Macierz Gramma. Twierdzenia o związkach między nimi.
49. Twierdzenie o wspólnej diagonalizacji komutujących operatorów normalnych.
50. Twierdzenie o rozkładzie biegunowym operatora.