I seria zadań domowych z Analizy I
26.10.2015

Zad. 1
Wykaż, że poniższe zdania są tautologiami:
a) $[(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$
b) $(p \vee q) \wedge (q' \vee r) \Rightarrow (p \vee r)$
c) $[(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge r')] \Rightarrow (p' \wedge q')$
Zad. 2
Wykaż poniższe twierdzenia:
a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$
b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$
c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
Zad. 3
Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pokaż, że:
a) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$ (łączność);
b) $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$;
c) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$ (rozdzielność);
d) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$.
Zad. 4 Znajdź zbiory:
a) $A \times B$, gdzie $A = \{a \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 > 0\}$,$B = \{b \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leqslant 0\}$
b) $\mathbb{Z} \cap \{x \in]-5, +\infty[: |x + 2| < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leqslant \frac{2}{3}\}$
c) $\bigcup_{t\in[2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]} A_t$, gdzie $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$
d) $\bigcup_{n=5}^{\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left([-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n^2}[\cap [-\frac{1}{2}, 2[\right)$
f) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left([0, n] \cup [n^2, \infty[\right)$
Zad. 5
Wykazać za pomocą indukcji matematycznej, że prawdziwe są następujące wzory dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$
b) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n-1}}{2}$
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$
e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k-3) = n(2n-1)$
f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k-2) = n(3n+1)$
g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3)$
h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$
i) $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sqrt{n} + 1$
k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$
l) $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
Zad. 6
Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są poniższe twierdzenia:
a) $n^7 - n$ jest podzielne przez 7.
b) $n^3 + 5n$ jest podzielne przez 6.

c) $3^{4n+2}+1$ jest podzielne przez 10.
d) $13^{2n}+6$ jest podzielne przez 7.
Zad. 7
Zbadaj surjektywność i injektywność odwzorowań, dla bijekcji znajdź odwzorowanie odwrotne:
a) $\mathbb{Z} \ni k \mapsto \frac{|4k-1|+1}{2} \in \mathbb{N}$;
b) $\mathbb{Z}^2 \ni (j,k) \mapsto j+k\sqrt{2} \in \mathbb{R}$;
c) $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$;
d) $\mathbb{Z} \ni k \mapsto 2k^2-k \in \{\frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$;
e) $\mathbb{N}^2 \ni (m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1) \in \mathbb{N}$;
f) $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x - x^{-1} \in \mathbb{R}$;
Zad. 8
Zbadaj ograniczoność zbiorów od góry i od dołu, jeśli są ograniczone podaj ich kresy i powiedz czy kresy należą do zbiorów.
a) $\{m\sqrt{5}-n : m,n \in \mathbb{N}\}$;
b) $\{\frac{n-10}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$;
c) $\{x\sin x : x \in]0,\infty[\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x+4|}{|x+2|} < x\}$
e) $\{x+\frac{1}{2x} : x \in]a,b[, 0<a<b\}$
Zad. 9
Zbadaj zbieżność ciągów (policz granicę bądź wykaż, że ciąg jest rozbieżny, jeśli jest rozbieżny sprawdź czy rozbiega się do $\pm\infty$)
a) $\frac{25^n+7}{3\cdot 5^{2n}-4}$
b) $\frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}+3}$
c) $(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$
d) $\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2}}$
e) $\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{n-\sqrt[3]{n^2+8}}$
f) $(\sqrt[3]{n^3+2n^2+4}-\sqrt[3]{n^3+1})$
g) $\sqrt[n]{n^{100}-2n^2+3}$
h) $\sqrt[n]{3^n+4^n}$
i) $\frac{1}{2n}\cos(n^3)-\frac{3n}{6n+1}$
j) $2^{-n}a\cos n\pi$
k) $\frac{2n}{2n^2-1}\cos\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)-\frac{n}{1-2n}\cdot\frac{n(-1)^n}{n^2+1}$
l) $\frac{2^n\cdot 3^{2n}}{n!}$
m) $\frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$
n) $\frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$
o) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
p) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$
q) $\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$
r) $\left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$
s) $\frac{\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)}{1/n}$
t) $n^2\left[2\ln n - \ln(n^2+2)\right]$
u) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+k}}$
w) $\frac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$
x) $\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$
y) $\frac{\ln(3n^2+1)+2n^2+3n+2}{n^2+2}$

z) $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} k^4}$

Zad. 10

Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $x_0 \in]-1,2[, x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$;

b) $x_0 > 1, x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n - 1}$;

c) $x_0 > \frac{1}{5}, x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{5x_n - 1}$

d) $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$;

e) $x_{n+1} = \frac{10}{1 + x_n^2}$ w zależności od $x_0 \in \mathbb{R}$.